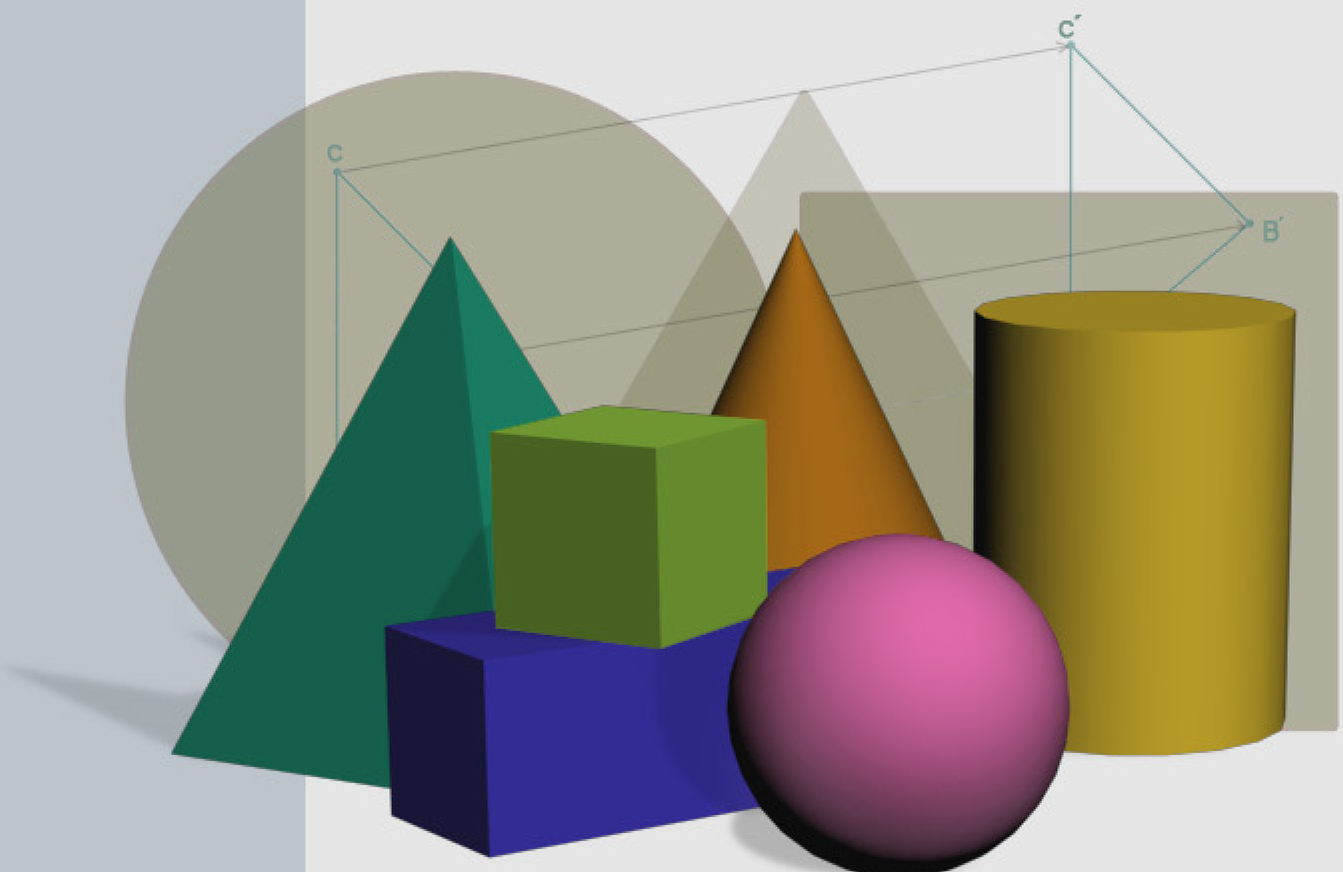
DIDÁCTICA DE LA GEOMETRÍA

PARA LA ESCUELA PRIMARIA



JORGE LUIS LEÓN GONZÁLEZ

ROBERT BARCIA MARTÍNEZ

DIDÁCTICA DE LA GEOMETRÍA PARA LA ESCUELA PRIMARIA

EDITORIAL EXCED

JORGE LUIS LEÓN GONZÁLEZ

ROBERT BARCIA MARTÍNEZ

Diseño de carátula: D.I. Yunisley Bruno Díaz
Dirección editorial: PhD. Jorge Luis León González

ISBN: 978-9942-7055-8-7

Editorial EXCED
Dr. Kennedy Nueva. 2do Callejón 11 A. Manzana 42, Número 26.
Guayaquil, Ecuador.
E-mail: editorial@excedinter.com

ÍNDICE

"Saber Geometría es más que reconocer figuras y cuerpos por sus nombres: es resolver problemas geométricos apoyándose en propiedades conocidas de figuras y cuerpos; en situaciones que, generalmente, son intramatemáticas, geométricas y que cuentan o no con apoyo gráfico. Su solución es lo que da sentido a la enseñanza de la Geometría".

(Bronzina, et al., 2009)

PRÓLOGO

La enseñanza de la geometría ocupa importantes funciones dentro del proceso de enseñanza-aprendizaje de la Matemática en la Educación Primaria, ya que mediante su estudio no solo se contribuye al desarrollo de habilidades geométricas, sino que se incide considerablemente en el desarrollo de habilidades intelectuales en los escolares desde las edades tempranas, las cuales serán aplicadas por estos en diferentes momentos de su vida.

No obstante, la enseñanza de esta parte de las matemáticas, que contribuye al desarrollo de las operaciones del pensamiento y creatividad en los escolares, ocupa una atención desfavorable hoy día por parte de muchos maestros, siendo una de las principales dificultades en su proceso de enseñanza-aprendizaje, desde la Educación Primaria, la relacionada con el desarrollo de habilidades. Por tal razón, en el presente libro, se centra su estudio en el tratamiento de los contenidos geométricos y en el proceso de desarrollo de habilidades geométricas en la Educación Primaria.

El primer capítulo lo hemos dedicado a mostrar a los maestros, de la Educación Primaria, las principales concepciones teórico-metodológicas del proceso de enseñanza-aprendizaje de la Matemática en la Educación, donde se destaca las tendencias en su proceso de enseñanza-aprendizaje y características en la escuela primaria cubana.

En el segundo capítulo presentamos un análisis de las habilidades geométricas que deben desarrollarse en sus escolares durante su tránsito por la Educación Primaria. Por otra parte exponemos los fundamentos teóricos que sustentan su desarrollo: principios, niveles, indicadores, acciones y operaciones para orientar y evaluar dicho proceso.

Los principios determinados favorecen concebir el proceso de enseñanza-aprendizaje de la geometría en la Educación Primaria de manera científica, acorde con las exigencias de la escuela primaria cubana; mientras que la propuesta de estructura interna de las habilidades geométricas, junto a los niveles e indicadores, permiten orientar el proceso de enseñanza-aprendizaje de la geometría, de acuerdo con las particularidades de cada escolar.

En el último capítulo hemos decidido ofrecerles a los maestros recomendaciones metodológicas para el tratamiento de los objetos geométricos fundamentales que se abordan en la Educación Primaria. Sugerencias, que hemos considerado necesario separarlas por ciclo, debido a la forma en que se les da tratamiento a los contenidos en cada uno de ellos.

No nos parece justo concluir el libro sin antes brindarle a los docentes el procedimiento para realizar algunos medios de enseñanza para el tratamiento de los contenidos geométricos y el desarrollo de habilidades en la Educación Primaria. Confiamos que estos le sean de apoyo en el proceso de enseñanza-aprendizaje y que puedan motivarlo a crear medios propios. Esto se lo agradecerán grandemente sus escolares.

Al finalizar el texto hemos añadido el listado de fuentes consultadas, que puede servir de interés para profundizar en estos conocimientos. Esperamos que al concluir la lectura de este libro cumplas con todas las expectativas que te conllevaron a hacerlo. Es nuestro mayor deseo que te sea de utilidad en tu autopreparación y que puedas poner en práctica sus ideas en el proceso de enseñanza-aprendizaje de la geometría en la Educación Primaria.

Los autores

Capítulo I. El proceso de enseñanza-aprendizaje de la geometría en la Educación Primaria

"La enseñanza de la Geometría ha de ser un núcleo central en el currículo escolar".

(Alsina Catalá et al.,1989)

1.1. Concepciones teórico-metodológicas del proceso de enseñanza-aprendizaje de la Matemática en la Educación Primaria

En la comunidad internacional de educadores matemáticos el término "Educación Matemática" se utiliza, con frecuencia, según Díaz Godino (2010), como sinónimo de "Didáctica de la Matemática", para referirse a la disciplina científica, que desde el punto de vista teórico y práctico, estudia los problemas que surgen en el proceso de enseñanza-aprendizaje de la Matemática y propone nuevas teorías para su transformación.

La Educación Matemática como sistema social, heterogéneo y complejo (Díaz Godino, 2010) tiene entre sus componentes o campos: la acción práctica y reflexiva sobre el proceso de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas; la tecnología que se propone elaborar y utilizar, junto al resto de los materiales y recursos; y la investigación científica, que analiza el funcionamiento del proceso, en su conjunto.

En la Educación Matemática se identifican, de acuerdo con Castillo, et al. (2006), tres perspectivas: la constructivista, que tiene en los escritos de Piaget su principal fuente; la sociocultural, cuyo marco teórico se fundamenta en las ideas de Vigotsky; y la interaccionista, que parte de las ideas de Blumer. Sin embargo, una y otra se complementan cuando pretenden una Educación Matemática centrada en la adquisición de capacidades, habilidades y valores que le permitan al individuo la actualización constante de sus conocimientos para aplicarlos en el mundo que les rodea.

La Educación Matemática, desde la perspectiva constructivista destaca como se construye el conocimiento matemático, a través de la relación del sujeto con el medio y la organización de sus acciones mentales; en la sociocultural es considerado un proceso social, que transita, en la actividad, de lo interpsicológico a lo intrapsicológico, apoyado por mediadores e instrumentos; mientras que en la interaccionista, desde un punto de vista socioconstructivista, se hace énfasis tanto en los procesos individuales como en los sociales, a través de la participación y negociación.

D'Ambrosio (2005), al observar el futuro, con respecto a la Educación Matemática, reconoce como se dirige hacia su integración con el resto de las áreas del conocimiento, principalmente en los países más desarrollados con tradición matemática fuerte y economía creciente; lograda, inicialmente, a partir de la relación intramateria.

Desde la concepción pedagógica la Educación Matemática en la escuela primaria valoriza el papel de la sensación y la percepción, como base del conocimiento matemático; y las posibilidades de su utilización en la interpretación, comprensión y explicación del contexto social e histórico, que se convierte en contenido de su actividad cognoscitiva. Tal consideración advierte la orientación formativa de las actividades que se organizan, desde el currículo, para la Educación Matemática; las cuales deberán ajustarse a las características del escolar, el nivel educativo y la naturaleza del contenido matemático en cuestión.

En este contexto los principios que declara Ruiz de Ugarrio (1965), para la enseñanza de la Matemática en la Educación Primaria destacan la importancia de las representaciones, en el paso de la percepción al pensamiento abstracto; el papel de la comprensión, la reflexión y el desarrollo del lenguaje, en la actividad racional; y la práctica, como principio y fin de toda actividad cognoscitiva, pues a partir de ella, el individuo aplica en la vida aquello que ha obtenido como resultado del pensamiento.

En la dirección del proceso de enseñanza-aprendizaje de la Matemática a nivel internacional, desde la década del 90 del siglo XX, existe influencia de las orientaciones curriculares elaboradas por el Consejo Estadounidense de Profesores de Matemática (National Council of Teachers of Mathematics, 2000), conocidas como "Principios y estándares para las matemáticas escolares". Estos principios, no se refieren a contenidos o procesos matemáticos específicos; solo describen aspectos relacionados con los programas e influyen en el desarrollo del currículo, la planificación de las clases, el diseño de evaluaciones, entre otras cuestiones.

Dentro de sus preceptos se significa la necesidad de lograr igualdad en la Educación Matemática, altas expectativas y apoyo a todos los escolares; un currículo coherente y centrado en las matemáticas de todos los niveles educativos; enseñanza que requiera comprensión del conocimiento previo de los escolares y del nuevo contenido que necesitan aprender; aprendizaje que propicie la construcción activa de los contenidos matemáticos; evaluación con el fin de apoyar el aprendizaje de las matemáticas, para proporcionar información útil, tanto a docentes como a escolares; y considerar la tecnología como un recurso esencial, para estimular el aprendizaje.

Al hilo de estas concepciones tomó auge la utilización del método de enseñanza por resolución de problemas en el tratamiento de los contenidos matemáticos (National Council of Teachers of Mathematics, 2000), desde puntos de vistas diferentes e interrelacionados: enseñar para resolver problemas, sobre la resolución de problemas y vía resolución de problemas.

El primero propone a los escolares solucionar problemas que promueven la búsqueda y sus aplicaciones en la vida; el segundo a utilizar la heurística en la enseñanza, para que aprendan a utilizar estrategias de solución; y el tercero a enseñar la Matemática a través de problemas y desarrollar la capacidad de razonamiento.

Esta situación permitió que docentes e investigadores incorporaran a sus prácticas este método, a partir de propuestas y metodologías contextualizadas en las que pretendían transmitir a sus estudiantes estrategias heurísticas adecuadas para la resolución de problemas en general. Entre las propuestas se destaca la planteada por De Guzmán (1993), a partir de la ideas de Polya y Schoenfeld, en la que se concibe la Educación Matemática como un proceso de inculturación, con variedad de formas de enfocar su enseñanza. Este método destaca la importancia de que el escolar sea capaz de manipular los objetos matemáticos (conceptos fundamentales), activar la capacidad mental y ejercitar la creatividad.

De Guzmán (1993), también considera que el escolar debe seleccionar la estrategia adecuada; luego reflexionar sobre el proceso de solución del problema, a fin de mejorarlo de manera consciente y hacer transferencias de las actividades realizadas a otros aspectos del trabajo mental; desarrollar confianza en sí mismo; divertirse a partir de la actividad mental ejecutada; implicarse en la solución de otros problemas de la ciencia, de la vida cotidiana y prepararse para los retos de la tecnología.

Díaz Godino & Batanero (2009), le reconocen un papel fundamental a la utilización del método de enseñanza por resolución de problemas, en función del desarrollo de competencias en la actividad matemática, teniendo en cuenta algunos aspectos del enfoque ontosemiótico. Desde su punto de vista, el docente debe seleccionar y reelaborar los problemas matemáticos idóneos para los escolares, usando los recursos apropiados; definir, enunciar y justificar los conceptos y procedimientos, teniendo en cuenta las nociones previas; implementar configuraciones didácticas (sistema de acciones entre docente y escolares), que permitan optimizar el aprendizaje; reconocer el sistema de normas sociales y disciplinares que posibilitan el desarrollo del proceso; conocer las aportaciones teóricas realizadas a la Educación Matemática; valorar la idoneidad didáctica de los procesos de estudio planificados o implementados en sus distintas dimensiones (epistémica, cognitiva, afectiva, interaccional, mediacional y ecológica); y desarrollar una actitud positiva hacia la enseñanza de las matemáticas, de modo que se valore tanto su papel formativo como su utilidad.

A partir de estas concepciones se infiere la necesidad de que los docentes desarrollen el proceso de enseñanza-aprendizaje de la Matemática con un enfoque estratégico, que facilite que los escolares, con autonomía y autodeterminación, se apropien de los conocimientos y habilidades necesarias en su contexto social y cultural, para incidir sobre él y transformarlo.

El predominio del método de enseñanza por resolución de problemas y el enfoque ontosemiótico en el proceso de enseñanza-aprendizaje de la Matemática, desde los primeros grados, avala algunas teorías de la Escuela Francesa de Didáctica de la Matemática, como es el caso de las situaciones didácticas, de Brousseau (1986), citada por Panizza (2003); y la de transposición didáctica; formulada por Chevallard (2005).

Las situaciones didácticas propician que los conocimientos matemáticos sean construidos por el sujeto en un contexto que resulte problemático para él. Luego, según la tipología, reconocida por Díaz Godin et al. (2004), estas se basan en problemas reales que motiven y atraigan la atención de los escolares. En su resolución se debe ofrecer la oportunidad de investigar posibles soluciones, individualmente o en grupos; favorecer el desarrollo del lenguaje matemático; comprobar y demostrar que la solución alcanzada es correcta; y utilizar el conocimiento adquirido en común.

Por su parte, la teoría de la transposición didáctica de Chevallard (2005), explica la forma en que son transformados los contenidos matemáticos (saberes sabios) en contenidos enseñables a los escolares (saberes a enseñar) y puestos en práctica en la enseñanza (saberes enseñados).

De lo anterior se asume que en este proceso el docente realiza acciones como la simplificación, modificación y reducción de la complejidad del saber original, de acuerdo con las particularidades de cada escolar y el contexto social en que se desarrolla el proceso de enseñanza-aprendizaje.

Un elemento importante a tener en cuenta es lo planteado por Arrieta (1998), citado por Barcia Martínez (2000), quien hace referencia a que en varios congresos internacionales de matemática educativa se ha manifestado, en el proceso de enseñanza-aprendizaje, que a cada etapa escolar le corresponde su rigor; el apoyo continuo en lo concreto, en la realidad; atender a la historia de la ciencia y respetarla; extender la Educación Matemática como un "saber hacer"; y destacar la importancia de la inducción y el empirismo.

A estas concepciones se agregan los aportes de Krutetskii (1968), mencionados por Wielewski (2005); y Giorgion (2010), quien propone una clasificación de estilos cognitivos, como referentes para establecer niveles de desarrollo del aprendizaje matemático, relacionados con los componentes: verbal-lógico y visual-pictórico; lo cual supone utilizar, como apoyo del proceso de enseñanza-aprendizaje, objetos concretos, para el desarrollo del lenguaje y el pensamiento lógico.

Vista la Educación Matemática desde estas tres perspectivas se ratifica la necesidad de integrar los aspectos esenciales desde una concepción histórico-cultural del proceso de enseñanza-aprendizaje. En este sentido se identifica la actividad externa, como punto de partida, para la interiorización de los conocimientos y habilidades; la relación que existe entre aprendizaje y desarrollo; el papel que juegan los mediadores al servir de orientadores en este proceso; y el lugar que se le otorga en ellas al lenguaje.

Esta posición cobra un significado esencial al asumirla como concepción para fundamentar el proceso de enseñanza-aprendizaje de la Matemática en la escuela primaria cubana, a partir de los principios, leyes y categorías de la didáctica general; concretados en su modelo de escuela (Rico Montero et al., 2008), que constituye la base para el logro de un aprendizaje desarrollador, pues intenta promover (Castellanos Simons et al., 2002) el desarrollo integral de la personalidad del educando; activar la apropiación de conocimientos, destrezas y capacidades intelectuales; garantizar la unidad de lo cognitivo y lo afectivo-valorativo en los aprendices; potenciar el tránsito progresivo de la dependencia a la independencia, así como el desarrollo de la capacidad de conocer, controlar, transformar creadoramente la realidad; realizar aprendizajes a lo largo de la vida, a partir del dominio de habilidades para aprender a aprender y la necesidad de una autoeducación constante.

El modelo asume como referente el enfoque histórico-cultural de Vigotsky (1979), y las tradiciones pedagógicas cubanas, desde el cual se configura una concepción humanista, que le otorga valor al papel del sujeto en la participación activa, directa y comprometida de su propio crecimiento personal y social.

Desde los aportes de estos investigadores, junto a los de Puig Unzueta (2003), se proyecta la renovación del proceso de enseñanza-aprendizaje de la Matemática; estableciendo como referente la teoría de niveles de desempeño cognitivo, derivada de teorías de evaluación del aprendizaje. Este concepto guarda estrecha relación con los niveles de asimilación, pues en ambos se considera el proceso de enseñanza-aprendizaje como vía mediante la cual se logra la apropiación de conocimientos y habilidades.

Los niveles de desempeño tienen un carácter sistémico, permiten dinamizar el control de todo el proceso de enseñanza-aprendizaje, medir su calidad y reorientarlo, de los resultados alcanzados hasta los deseados. De la misma forma, facilitan, al evaluar la calidad de los conocimientos y las habilidades de los escolares, establecer diferentes jerarquías y obtener un proceso cognoscitivo diferenciador, flexible y diverso.

Dentro de los preceptos del modelo de escuela primaria en Cuba (Rico Montero et al., 2008), se destaca que los niveles de desempeño cognitivo, sirven de utilidad para conocer el desarrollo logrado por los escolares; pero cuando el docente va a planificar una clase debe orientarse, también, por los objetivos y los tres niveles de asimilación.

La esencia de estas concepciones subyace en la tesis de la psicología marxista-leninista de que todas las cualidades psíquicas del hombre se desarrollan mediante la relación del sujeto con la realidad histórica-social-cultural y en la unidad de lo concreto y lo abstracto, como exigencia; constituye esta relación un elemento importante en la dirección del proceso de enseñanza-aprendizaje de la Matemática, desde los primeros grados de la Educación Primaria, pues reconocen el papel del docente para la orientación de los contenidos y que los escolares puedan aplicarlos en la práctica.

1.2. Tendencias del proceso de enseñanza-aprendizaje de la geometría en la Educación Primaria en otros países

Las concepciones teórico-metodológicas del proceso de enseñanza-aprendizaje de la Matemática en la Educación Primaria, en las últimas décadas, han generado tendencias que sirven de base para desarrollar transformaciones en el tratamiento metodológico de la geometría, desde los primeros grados de la Educación Primaria; criterio este con el cual coincide Proenza Garrido (2002), cuando señala que la enseñanza de la geometría se ha visto influenciada por modelos didácticos, difundidos en varios países; dirigidos, algunos de ellos, a favorecer el desarrollo de habilidades geométricas específicas en los escolares.

Entre los modelos didácticos de mayor trascendencia en la enseñanza de la geometría, se encuentra el de Van Hiele; propuesto por Pierre Marie Van Hiele y Dina Van Hiele-Geldof, en 1957, a partir de su experiencia docente, estudios de Piaget y la psicología de la Gestalt. De acuerdo con sus autores, la finalidad del modelo es desarrollar en los escolares la comprensión o razonamiento (insight) geométrico. Por tal razón, los niveles, así como las fases de aprendizaje, están orientados para alcanzar este propósito.

Los cinco niveles (reconocimiento, análisis, deducción informal, deducción formal y rigor) explican la manera en que ocurre la comprensión geométrica en los escolares, desde las formas intuitivas del pensamiento hasta las deductivas. No es posible alterar el orden de adquisición de los niveles; cada uno sirve de base para el siguiente, lleva asociado su lenguaje específico; y su paso por ellos, depende más de la instrucción recibida por el escolar que de la maduración biológica.

Se estructura cada nivel de comprensión en cinco fases de aprendizaje (información, orientación dirigida, explicitación, orientación libre e integración), que le permiten al docente organizar el proceso de enseñanza-aprendizaje de la geometría, de manera que los escolares adquieran los conocimientos geométricos básicos, para después centrar la actividad en utilizarlos y combinarlos. Van Hiele (1957), asegura que para que cada escolar avance en la construcción activa del conocimiento y alcance un nivel de comprensión superior, debe superar estas fases.

Este modelo puede ser utilizado para orientar la comprensión de los escolares de la Educación Primaria, puesto que las formas intuitivas del pensamiento geométrico comienzan a desarrollarse en los primeros grados hasta el tercer nivel y continúa su ascenso en el resto de las enseñanzas del sistema educacional; sin embargo una desventaja que presenta es que le otorga demasiada importancia al papel de los procesos de instrucción para el desarrollo del pensamiento, en vez del desarrollo integral de la personalidad del escolar, a partir de la unidad que existe entre lo biológico, lo social y cultural.

Jaime Pastor & Gutiérrez Rodríguez (1996), afirman que los estudios iniciados por Van Hiele (1957), han dado lugar a nuevas investigaciones dirigidas a confirmar si esos niveles, en los escolares, describen exactamente el pensamiento geométrico; su distribución, de manera simultánea, en dos de ellos; la globalidad en todos los conceptos geométricos; la jerarquía, secuencialidad y el que más predomina en el proceso de enseñanza-aprendizaje; la existencia única de esos cinco; y otras investigaciones, relacionadas con la aplicación de esta teoría en diferentes aspectos de la geometría, como de la Matemática; así como la combinación con algunas, que explican la manera en que ocurre y se desarrolla la comprensión de los conceptos geométricos.

Es en este último caso que han promovido tendencia en la enseñanza de la geometría, de acuerdo con Proenza Garrido (2002), algunos modelos didácticos como el de ubicación espacial, planteado por Saiz (1997), donde se proponen situaciones, en las que son necesarias la realización de acciones espaciales, en el entorno; el del aprendizaje acerca del espacio, propuesto por Bishop (1997), el cual insiste en mostrar que las ideas geométricas espaciales que se enseñan en la escuela no son ajenas al mundo real; el de manipulaciones geométricas, expuesto por Brenes (1997), en el que se destaca la importancia de la utilización de figuras y cuerpos geométricos para desarrollar la percepción espacial y una mejor comprensión del mundo; y el del uso de materiales concretos, formulado por Castro (1997), que consiste en utilizar modelos geométricos para la construcción de los conceptos geométricos básicos.

En estudios realizados por los investigadores se evidencia como tendencia, en países como: Italia, España, Panamá y Venezuela, que el proceso de enseñanza-aprendizaje de la geometría, comienza en los primeros grados de la Educación Primaria y se extiende a lo largo de la enseñanza general; incide, en su tratamiento, como fundamento psicológico, la teoría de Piaget, Vigotsky y Ausubel.

Se constató, además, que existen diferencias de criterios en cuanto a la enseñanza de la geometría; en algunas de estas naciones, se enseña como una materia aparte, al finalizar el resto de los contenidos matemáticos; y en otras, se vincula con contenidos matemáticos como la numeración y la medida. En las concepciones curriculares analizadas se relacionan los contenidos geométricos con la vida, debido a la repercusión que tiene su estudio en diversas áreas y materias de la actividad social.

A partir de estas ideas es que se inicia el estudio de la geometría con contenidos de orientación espacial, a partir de actividades lúdicas y más tarde con el de figuras, movimientos y cuerpos geométricos; sin embargo en algunos países se parte del estudio de los cuerpos geométricos y más tarde se introducen las figuras planas.

Se aboga por una enseñanza orientada al desarrollo de las habilidades geométricas: visual, verbal, para dibujar, lógica y para modelar; se utiliza, también, el método de resolución de problemas, de manera explícita o implícita, para su desarrollo en los escolares, mediante actividades de manipulación, creación, generalización y aplicación de los contenidos.

La enseñanza de los contenidos geométricos se realiza de forma intuitiva para asegurar la imaginación espacial y la formación de los conceptos básicos con el uso de objetos concretos, como modelos, para que el escolar descubra las propiedades de los objetos geométricos y desarrolle su vocabulario.

Por último, se utilizan herramientas tecnológicas como videos y aplicaciones informáticas; se aplica, tanto en países europeos como latinoamericanos, el modelo de Van Hiele para orientar la comprensión geométrica en los escolares y existe influencia de investigaciones nacionales e internacionales en el tratamiento metodológico de la geometría en estos grados.

Las tendencias analizadas destacan, como ideas rectoras, para la dirección del proceso de enseñanza-aprendizaje de la geometría en la Educación Primaria, la importancia de vincular los contenidos geométricos con la vida; la utilización de objetos concretos y otros medios de enseñanza, para desarrollar habilidades geométricas; y el desarrollo del pensamiento geométrico abstracto.

1.3. El proceso de enseñanza-aprendizaje de la geometría en la escuela primaria cubana

El proceso de de la geometría en Cuba ha atravesado por profundas transformaciones en su diseño y desarrollo curricular; se ha encontrado influenciado por las perspectivas de Educación Matemática y las diferentes tendencias que se han gestado a nivel internacional.

El desarrollo histórico del proceso de enseñanza-aprendizaje de la geometría en la escuela cubana, según Rizo Cabrera (1987), se resume en tres etapas: una tradicional, determinada por la utilización de las ideas euclidianas, que concluye en el siglo XIX; otra influenciada por la reestructuración axiomática realizada por Hilbert a los postulados de Euclides y las propuestas de Klein, que llega hasta la década de 1950; y la última, de la segunda mitad del siglo XX hasta la defensa de su tesis, caracterizada por dos momentos importantes: la introducción de la teoría de conjuntos en el currículo matemático y las ideas de la Comisión Internacional para el Estudio y la Mejora de la Enseñanza de las Matemáticas (CIEAEM) de poner fin a la enseñanza de la Matemática pura y aproximarla a otras ciencias, de acuerdo con la realidad social y la práctica.

A partir de la defensa de la tesis doctoral de Rizo Cabrera (1987), comienza una nueva etapa en la concepción del proceso de enseñanza-aprendizaje de la geometría en la escuela cubana, en la que se estructuran los contenidos geométricos en tres momentos fundamentales: uno inicial o propedéutico, que abarca la enseñanza preescolar y hasta el cuarto grado; otro de estudio deductivo, que comienza en los grados quinto y sexto de la escuela primaria y se extiende hasta la Secundaria Básica; y el último de complementación. Debe destacarse que en ninguno de esos momentos se hace una construcción axiomática rigurosa de la geometría, aunque sí se incluyen elementos intuitivos de los axiomas que aparecen en los sistemas de Euclides y de Hilbert.

En el primer ciclo de la escuela primaria cubana la enseñanza de la geometría tiene un carácter intuitivo, operativo, perceptual y práctico, pues todas las propiedades de las figuras y cuerpos geométricos elementales se obtienen, a partir de percepciones visuales y táctiles. Este carácter está dado por las particularidades psicológicas que tienen los escolares en estos grados; las cuales han sido estudiadas por especialistas cubanos como Rico Montero et al. (2008), para brindar una mejor atención pedagógica y dirigir las acciones educativas con mayor efectividad en el proceso de enseñanza-aprendizaje.

De esta manera, se subdivide el primer ciclo de la Educación Primaria, por la variedad de sus edades, en dos momentos o etapas de desarrollo: uno que comprende de 6 a 7 años (primero y segundo grado) y otro de 8 a 10 años (tercero y cuarto grado).

De acuerdo con los programas de Matemática en el primer ciclo la formación de los conceptos se realiza con objetos concretos o su materialización. En estos grados se procede al desarrollo de operaciones mentales como el análisis, la síntesis, la abstracción y la generalización; con acciones, que favorecen la formación de nociones y habilidades en los escolares, como la observación, la descripción, la comparación, la clasificación, entre otras.

El tercer y cuarto grado, es el momento de desarrollo en el que se culmina el primer ciclo. En estos grados se continúa con las formas de organización y dirección de una actividad de aprendizaje reflexiva, sobre la base de los requerimientos señalados para los grados iniciales. Es posible lograr al terminar el ciclo, niveles superiores en el desarrollo de habilidades en los escolares y un control valorativo de la actividad realizada.

En el segundo ciclo de la escuela primaria, la enseñanza de la Geometría tiene entre sus propósitos continuar el desarrollo de las habilidades y capacidades iniciadas en los primeros grados. El quinto grado, constituye la etapa de tránsito de la Geometría inductiva a la deductiva. En este grado y en el siguiente se sistematizan los conocimientos geométricos y las habilidades ya obtenidas, como condiciones previas para el desarrollo de nuevas habilidades como la de argumentación, apoyada en el cálculo y las demostraciones geométricas.

La enseñanza de la geometría en la educación primaria debe contribuir a que los escolares desarrollen la capacidad de representación e imaginación espacial (vista geométrica), mediante actividades perceptuales, de la forma y el tamaño de los objetos; a que dominen las propiedades esenciales de los objetos geométricos; y desarrollen habilidades al reconocerlos, trazarlos y/o construirlos, describirlos y argumentar proposiciones geométricas dadas.

En la Educación Primaria se abordan los conceptos de objetos geométricos fundamentales de figuras, cuerpos y movimientos geométricos o transformaciones en el plano, que se muestran en la tabla que sigue.

Tabla 1. Conceptos geométricos fundamentales abordados en la Educación Primaria.

Figuras geométricas		Movimientos geométricos	Cuerpos geométricos
Figuras geométricas elementales	Otras figuras geométricas		
• Punto • Recta • Plano • Segmento • Semirrecta • Semiplano • Ángulo	• Polígono: * Triángulo * Cuadrilátero: - Trapecio - Paralelogramo - Rectángulo - Cuadrado - Rombo • Circunferencia y círculo	• Simetría • Traslación • Reflexión • Rotación	• Prisma: * Ortoedro: - Cubo • Pirámide • Cilindro • Cono • Esfera

Se debe señalar que en estos grados hay conceptos que se inician y otros, que sirven de base a nuevos conceptos, se continúan profundizando. Ballester Pedroso et al. (2001), señalan que la formación de conceptos tiene gran importancia en el proceso de enseñanza-aprendizaje de la Matemática, pues contribuye a la comprensión de las relaciones matemáticas; el desarrollo de la capacidad de aplicar lo aprendido, de forma segura y creativa; el adiestramiento lógico-verbal; la transmisión de importantes nociones ideológicas, relacionadas con la teoría del conocimiento; y el desarrollo de numerosas propiedades del carácter.

Para el trabajo metodológico con la formación de conceptos se consideran tres etapas o fases, en las cuales el escolar realiza diferentes acciones; estas son: identificar el concepto, realizarlo y aplicarlo. Lo esencial de la primera etapa radica en presentar una serie de objetos para que los escolares determinen si cumplen o no con las propiedades del concepto; en la segunda se comprueban esas propiedades en los objetos, y finaliza con la explicación del concepto; mientras que la tercera se realiza en relación con otras situaciones de la enseñanza, los cuales sirven de condiciones previas para definir nuevos conceptos.

Otro elemento a tener en cuenta en la obtención de conceptos son sus vías de formación. Para ello se sigue la inductiva, que va de lo particular (contenido) a lo general (extensión), porque a partir de ejemplos, se elabora la definición, paso a paso; y la deductiva, que lo hace de lo general a lo particular (de la extensión al contenido del concepto), pues se parte de la definición del concepto y su contenido es descubierto, mediante ejemplos.

Las relaciones fundamentales que se trabajan, unidas a los conceptos de objetos, son de posición entre puntos, rectas y plano ("...pasa por…" o "...está situado en…"); entre puntos que están situados en una recta ("... se encuentra entre... y..."); entre rectas ("…se cortan" o "…no se cortan"), para indicar paralelismo, en el caso de las que no se cortan en el plano o perpendicularidad, aquellas que al cortarse coinciden con los lados cortos del cartabón; y de congruencia o igualdad geométrica ("…igual que…"), entre segmentos, que posteriormente es utilizada, a partir de actividades de superposición, en otras figuras.

Lo anterior se logra con la realización de operaciones como el reconocimiento de figuras y cuerpos geométricos en objetos del medio, el trazado de figuras geométricas, la comparación de segmentos, la medición de la longitud de un segmento, el desarrollo de cuerpos geométricos, la superposición de figuras, entre otras.

El tratamiento de los conceptos de relación y operación, unidos a los de objetos, en el proceso de enseñanza-aprendizaje de la geometría, señala Proenza Garrido (2002), *"se transforman en procedimientos"* (p. 59). De esta manera, los procedimientos geométricos son aquellos procedimientos típicos del tratamiento de la geometría que guardan relación con los propios del proceso de enseñanza-aprendizaje de la Matemática: algorítmicos y heurísticos.

Un procedimiento geométrico es algorítmico cuando ofrece una secuencia de pasos finitos que permiten la solución de la situación problémica dada, a partir del cual se obtienen Sucesiones de Indicaciones con Carácter Algorítmico (SICA); por ejemplo, las construcciones geométricas: elementales[1] , fundamentales y formales.

Mientras que los procedimientos geométricos heurísticos son aquellos que orientan hacia la búsqueda y descubrimiento de vías de solución a partir de la analogía, la inducción, la reducción de un problema a otro ya resuelto, la generalización, etcétera. Ejemplos de situaciones donde se aplica este tipo de procedimiento geométrico se encuentran en algunos ejercicios de reconocimiento de figuras compuestas y de argumentación de proposiciones, en los que se establezca relación entre conceptos.

La etapa que abarca la Educación Primaria tiene gran importancia en el proceso de enseñanza-aprendizaje de la geometría, pues es en ella cuando se comienza a desarrollar en los escolares la capacidad de interiorizar las propiedades geométricas observadas y la formación de su vocabulario geométrico.

La enseñanza de los conceptos y procedimientos geométricos en la escuela primaria cubana tiene como antecedentes los trabajos intuitivos que se realizan en el programa "Nociones elementales de la Matemática", que se incluye en los círculos infantiles, vías no institucionales y el grado preescolar; además de los contenidos de orientación en el espacio y en la hoja de trazado, que se inicia en el primer grado.

El dominio de estos conceptos y procedimientos se logra en los escolares a partir de actividades experimentales de dibujo, modelado, manipulación, superposición composición y descomposición, en las cuales se desarrollan, paulatinamente, un conjunto de habilidades geométricas.

[1] En la geometría plana, las construcciones geométricas elementales son aquellas construcciones (punto y recta), que junto a las fundamentales (rectas paralelas y perpendiculares; ángulos; etcétera), sirven de base para realizar construcciones geométricas formales (circunferencia, paralelogramo, rectángulo, etcétera), donde se aplican esas nociones geométricas.

Capítulo II. Fundamentos teóricos para el desarrollo de habilidades geométricas en la Educación Primaria

"De las ideas del espacio al espacio de las ideas".

(Calvo Penadés et al., 2002)

2.1. El desarrollo de habilidades geométricas en la Educación Primaria

Uno de los objetivos fundamentales de la enseñanza de la geometría en la Educación Primaria es el desarrollo de habilidades; categoría psicológica que le permite a un individuo ejecutar determinada actividad con éxito, en dependencia de los conocimientos alcanzados; conocer e interpretar, como se señala en las exigencias del modelo de escuela primaria en Cuba (Rico Montero et al., 2008), los componentes de la naturaleza, las relaciones que existen entre ellos, la sociedad y a sí mismo.

Las habilidades matemáticas, para Krutetskii (1968), citado por Wielewski (2005), son aquellas *"características psicológicas individuales (principalmente de actividad mental) que responden a exigencias de la actividad matemática escolar y que influyen... con éxito en el dominio creativo de la Matemática como asignatura escolar".* (p. 32)[2]

Por su parte, Geissler et al. (1977), plantean que son *"aquellos componentes automatizados que surgen en el desarrollo de acciones con contenido preferentemente matemático y finalmente contribuyen decisivamente, mediante su aplicación, al nivel de poder en Matemática"*.(p. 75)

Las habilidades matemáticas son desarrolladas solamente en actividades relacionadas con la Matemática. De acuerdo con Wielewski (2005), esto significa que cada uno de los componentes de esta asignatura puede contribuir al desarrollo de habilidades relacionadas y/o diferentes. Las estudiadas por Krutetskii (1968), son: percepción, generalización, lógica-raciocinio, reducción, flexibilidad, analítico-sintética, memoria matemática y conceptos espaciales. Entre estas habilidades matemáticas se encuentran implícitas las geométricas básicas planteadas por Hoffer (1990), citadas por Galindo (1996), quien las abarca en cinco áreas: visual, verbal, para dibujar, lógica y para modelar.

El desarrollo de la habilidad visual posibilita que los escolares asimilen las propiedades geométricas, a partir de lo que observan, ya sean objetos reales o representaciones; la verbal, que empleen apropiadamente el vocabulario geométrico; la de dibujo, que interpreten y representen; la lógica, que adquieran los argumentos necesarios para reconocer la validez de una proposición geométrica; y la de modelar, describir y explicar fenómenos de la vida real, por medio de modelos.

A partir del análisis de estos precedentes se define el término habilidades geométricas como: "tipo de habilidades matemáticas que posibilitan que un individuo, a partir del dominio de acciones y operaciones prácticas e intelectuales, aplique los conceptos y procedimientos geométricos, adquiridos, en la solución creadora de situaciones propias de la materia y/o de la vida práctica".

Por otra parte, el estudio de los programas de Matemática de la escuela primaria cubana (Cuba. Ministerio de Educación, 2007), y otros materiales de necesaria consulta (Rizo Cabrera, 1987; León Roldán, 2007), permitió valorar el proceso de desarrollo de habilidades geométricas en la educación primaria. Estas habilidades son: reconocer objetos geométricos, trazar y/o construir, argumentar proposiciones geométricas y resolver problemas geométricos, que se encuentran muy relacionadas con las señaladas por Hoffer (1990), citadas por Galindo (1996), y las analizadas por Krutetskii (1968), mencionadas por Wielewski (2005); y Giorgion (2010); aunque muchas de esta última clasificación, constituyen acciones para su desarrollo.

El desarrollo de la habilidad reconocer objetos geométricos en la Educación Primaria

La habilidad reconocer, que se desarrolla desde los primeros grados de la Educación Primaria, es considerada básica, puesto que se manifiesta como acción indispensable (Ortiz Ocaña, 2006) para el desarrollo de otras habilidades. En la Educación Primaria se dirige el aprendizaje geométrico de forma tal que los escolares puedan reconocer objetos geométricos en el medio, a partir de modelos, mediante la denominación de un concepto y en figuras compuestas.

Desde el punto de vista psicológico para reconocer debe existir una familiarización entre el sujeto y el objeto, a partir de percepciones visuales y/o táctiles. "*Cuando aparece en nuestra conciencia este objeto, se establece una correspondencia tal, que se produce el conocimiento de que ya antes ese objeto había sido concientizado".* (Ponce Solozábal, 1988, p. 61)

De hecho, el reconocimiento es el último de los niveles de acciones perceptivas junto al descubrimiento, la diferenciación y

[2] Traducción realizada por los autores.

la identificación (Petrovski, 1986). Los dos primeros se catalogan entre las acciones perceptivas y la identificación junto al reconocimiento entre las acciones de reconocimiento.

Se entiende por percepción, "*la imagen de los objetos o fenómenos que se crea en la conciencia del individuo al actuar directamente sobre los órganos de los sentidos, proceso durante el cual se realiza el ordenamiento y la asociación de las distintas sensaciones en imágenes integrales de cosas y hechos".* (Petrovski, 1986, p. 223)

Alsina Catalá et al. (1989), significan que el correcto desarrollo de la percepción visual es fundamental para alcanzar el conocimiento de las relaciones espaciales, pues mediante ella el sujeto puede analizar la forma, el tamaño y la distribución de los objetos en el entorno, con respecto a la ubicación de su propio cuerpo.

Al respecto, la literatura consultada (Alsina Catalá et al., 1989) cita tres tipos de espacio donde se puede desarrollar esta y otras habilidades: microespacio, área reducida donde el escolar puede realizar actividades experimentales (mesa); mesoespacio, parte que está al alcance de la vista, donde se pueden realizar pequeños desplazamientos y en el que los objetos fijos funcionan como puntos de referencia (aula, patio); y macroespacio, zona enmarcada al aire libre (ciudad, campo).

El desarrollo de la percepción visual exige de "*una serie de habilidades, entre las que se destacan el "saber ver" y el "saber interpretar"* (Alsina Catalá et al., 1989, p. 61); se considera que estas acciones se relacionan con los niveles de acciones perceptivas, abordados por Petrovski (1986). Para este autor, el descubrimiento constituye la base inicial de todo proceso sensorial; mientras que la diferenciación tiene como resultado final la formación de la imagen perceptiva.

Por otro lado, el reconocimiento puede realizarse (Petrovski, 1986) una vez que se forma la imagen de percepción. Son indispensables para ello, las operaciones de comparación e identificación. Esta última, es la parte intermedia entre la diferenciación y el reconocimiento, quien siempre trae implícito la identificación, donde el estímulo o imagen que se percibe se registra en la memoria. En el reconocimiento también se incluye la clasificación en clases de objetos, la elección del modelo correspondiente entre ellos y la comparación, a partir de las propiedades esenciales del objeto, guardadas en la memoria de larga duración.

Se asume que aunque reconocer, según Silvestre Oramas & Zilberstein Toruncha (2002), no está señalada como una habilidad intelectual puede considerarse como tal; puesto que, de acuerdo con Petrovski (1986), reconocer siempre lleva consigo identificar, que es considerada, por estos autores, una habilidad intelectual.

Las habilidades intelectuales, según Álvarez de Zayas (1999); Silvestre Oramas & Zilberstein Toruncha (2002); y Ortiz Ocaña (2006), son habilidades que se aplican, de manera general, tanto en el proceso de enseñanza-aprendizaje como en la vida y se desarrollan a partir de habilidades específicas; ellas constituyen condición previa para el desarrollo de otras habilidades y para el resto de la actividad cognoscitiva del hombre.

Un elemento a tener en cuenta para el desarrollo de la habilidad reconocer objetos geométricos es el algoritmo propuesto por Talízina (1988), que consta de los siguientes pasos: (1) denominar la primera característica; (2) establecer si el objeto tiene la primera característica; (3) anotar el resultado obtenido; y (4) comprobar si la respuesta es acertada.

De acuerdo con esta autora, en el primer paso se expresa una de las características de un objeto geométrico; en el segundo se determina si ese objeto cumple con esa característica dada; en el tercero se anota ese resultado y se continúa analizando si el objeto sigue cumpliendo con el resto de las características; y en el cuarto se llega a la conclusión si cumple o no con todas las expuestas.

Se considera que este procedimiento, que es para la formación de los conceptos, de manera general, puede aplicarse en el desarrollo de la habilidad reconocer objetos geométricos. Sin embargo, no se declara en él, de manera explícita, los fenómenos psíquicos que intervienen en el desarrollo de habilidades como la percepción visual y táctil, necesarios para la enseñanza de la geometría en estos grados. En esta propuesta de Talízina (1988), no se plantea como paso que se llegue a establecer nexos entre los objetos; lo que permitiría establecer las diferencias y semejanzas que existen entre ellos.

El desarrollo de la habilidad geométrica trazar y/o construir en la Educación Primaria

La habilidad geométrica trazar y/o construir tiene importantes funciones en la clase de geometría, pues con su desarrollo se les permite a los escolares obtener figuras y cuerpos geométricos como representantes de cualquier concepto de la materia, para comprender sus propiedades o a partir de su dominio: en papel cuadriculado, con instrumentos de dibujo u otros materiales como el tangram, el geoplano, varillas y desarrollos planos.

En la Educación Primaria, se familiarizan los escolares con instrumentos de dibujo como la plantilla de trazado, para representar círculos y otros polígonos; la regla, para trazar rectas y otras figuras; el cartabón, que permite en combinación con una regla o un segundo cartabón trazar rectas paralelas y perpendiculares y el compás, para trazar circunferencias.

Los primeros grados constituyen la base para las construcciones geométricas formales que se comienzan a desarrollar en cuarto grado. Por lo general, las construcciones geométricas van acompañadas de un procedimiento que inicialmente es ejemplificado por el docente en la pizarra, y más tarde, asimilado, por los escolares con su ejercitación.

Geissler et al. (1978), presentan una serie de pasos que el maestro tiene que tener presente para desarrollar esta habilidad en sus escolares, que se encuentran relacionados con la teoría de la formación por etapas de las acciones mentales y los conceptos, puesto que estos autores aplicaron las ideas de Galperin (1987), en la formación de todos los conceptos matemáticos, de primero a cuarto grado, pero se corresponden solamente con la etapa de la acción de forma material o materializada, de la fase de ejecución. Estos pasos metodológicos se resumen a continuación:

1. Demostrar en la pizarra, o mediante el uso de otro tipo de medio de enseñanza cómo se realiza la construcción.

2. Realizar en la pizarra la construcción apoyado en los pasos que expone un escolar. En esta etapa el escolar comienza a apropiarse del vocabulario geométrico necesario para realizar la construcción; paulatinamente se va perfeccionando.

3. Describir el procedimiento, mientras que un escolar sigue los pasos de la descripción. En este paso no se aconseja una demostración en la pizarra por parte de los escolares, pues los instrumentos para trazar en la pizarra son difíciles de manipular (aunque a partir de cuarto grado estos ya están en condiciones de manipularlos).

4. Brindar textualmente el procedimiento a seguir para realizar la construcción; los escolares lo leen e inmediatamente siguen las instrucciones para realizar la construcción.

En la Educación Primaria para desarrollar la habilidad geométrica trazar y/o construir los escolares reproducen los objetos geométricos con diversos materiales e instrumentos, mediante la observación de modelos; los representan siguiendo un conjunto de pasos (SICA), sus propiedades esenciales y las relaciones entre conceptos; finalmente se encuentran en condiciones de obtener otros objetos geométricos, a partir de actividades de composición y descomposición.

El desarrollo de la habilidad argumentar proposiciones geométricas en la Educación Primaria

Argumentar es una habilidad de carácter intelectual (Silvestre Oramas & Zilberstein Toruncha, 2002). Consiste en un proceso de razonamiento en el que se defiende una posición, a partir de un grupo de razones que la sustentan. La argumentación influye en el desarrollo de habilidades generales como la refutación e inferencia, pues durante este proceso se relaciona mentalmente en forma de ideas, el conocimiento adquirido, que luego, se materializa en forma de criterios y/o juicios: verbales o escritos.

Ponce Solozábal (1988,), asegura que las ideas *"son productos abstractos e indirectos de la cognición; son conocimientos nuevos que se obtienen a partir de otros anteriores" (*p. 36). El psicólogo Vigotsky (1982), destaca la importancia entre pensamiento y lenguaje; afirma que "*el lenguaje externo es la conversión del pensamiento en palabra, su materialización y objetivación*" (p. 129); mientras que en el lenguaje interior el habla se transforma en pensamientos internos. Según este mismo autor, "*el lenguaje escrito es la forma más elaborada del lenguaje"* (Vigotsky, 1982, p. 140), puesto que facilita organizar mejor las ideas de lo que se transmite y se puede revisar en múltiples ocasiones.

El argumento o el juicio, como lo nombra Petrovski (1986), *"es el reflejo de las conexiones existentes entre los objetos y fenómenos de la realidad o entre sus propiedades y características" (*p. 297). Considera este autor, que los juicios son manifestaciones de algo sobre algo que afirman o niegan relaciones entre objetos, acontecimientos y fenómenos de la realidad.

Los juicios se forman habitualmente por dos métodos y tienen como fin la formación de conclusiones. Por el método directo, se expresa lo que se percibe y a partir de conclusiones y razonamientos, mediante un conjunto de juicios se fundamentan otros.

En la enseñanza de la geometría en la Educación Primaria, mediante el desarrollo de la habilidad argumentar proposiciones geométricas se favorece la formación del vocabulario geométrico, del pensamiento lógico-deductivo y se sientan las bases para las demostraciones geométricas, trabajadas en grados posteriores.

Hoffer (1990), quien es mencionado por Galindo (1996), coincide con Van Hiele (1957), en que al desarrollar esta habilidad, en sus primeros indicios, los escolares, como no dominan las propiedades de las figuras y cuerpos geométricos, interpretan frases, orales o escritas que los describen. Posteriormente, están en condiciones de describir las figuras y cuerpos geométricos; utilizar sus propiedades para argumentar el valor de verdad de proposiciones geométricas, sobre la base de las conocidas y de la relación entre conceptos geométricos.

Para la habilidad de argumentación en geometría se destacan dos vías esenciales, una sobre la base experimental y otra sobre la base de las propiedades, aunque en ocasiones se combinan.

1. Sobre la base experimental.

2. Sobre la base de las propiedades.

- Identifiquen o realicen conceptos o relaciones.
- Apliquen una proposición antes conocida.
- Apliquen un procedimiento.
- Apliquen el contrarrecíproco de un teorema.
- Refuten una proposición mediante un contraejemplo.

Las demostraciones constituyen un nivel superior de la habilidad argumentación y aunque el objetivo es que los escolares las comprendan y se familiaricen con ellas, es necesario que los docentes tenga un dominio de las mismas en cuanto al contenido geométrico que en ellas se ponen de manifiesto, así de su tratamiento metodológico, por lo que a continuación se exponen algunos elementos del proceso de elaboración y demostraciones de teoremas.

En el tratamiento de los teoremas y sus demostraciones se destacan los siguientes procesos parciales: búsqueda del teorema, búsqueda de una demostración y representación de la demostración.

La búsqueda de teoremas constituye un proceso parcial que tiene especial significación desde el punto de vista pedagógico, pues posibilita colocar a los escolares ante situaciones en las que actúan como "redescubridores".

En el caso de la enseñanza de la geometría en la escuela primaria, el tratamiento de los teoremas comienza en sexto grado. Su búsqueda tiene un mayor peso que la demostración, aunque en los restantes grados se abordan propiedades que constituyen teoremas, pero estos por factores metodológicos no se tratan así.

Por ejemplo, en el primer ciclo de la escuela primaria es objetivo que los escolares reconozcan que los lados opuestos de un paralelogramo son congruentes, proposición que constituye un teorema; sin embargo no se demuestra. De los procedimientos reductivos, las actividades prácticas como las mediciones y comparaciones sistemáticas son los más empleados en la escuela primaria.

El desarrollo de la habilidad resolución de problemas geométricos

El desarrollo de la habilidad resolución problemas constituye un objetivo primordial del programa de Matemática de la Educación General, por tanto los docentes deben prestar especial atención a su tratamiento metodológico.

Consideramos por su importancia abordar algunas consideraciones teóricas sobre el concepto problema. Desde el punto de vista científico conviene precisar las distintas connotaciones del referido concepto. Como categoría de la lógica dialéctica refleja la existencia de una contradicción dialéctica en el objeto a conocer, pues "determina la actividad investigativa de búsqueda del hombre, encaminada al descubrimiento de un conocimiento nuevo o a la aplicación de uno conocido a una situación nueva". (Majmutov, 1983, p.58)

Como categoría psicológica refleja las contradicciones dentro del proceso del conocimiento del objeto por el sujeto. De acuerdo con Rubinstein (1966) es la causa primaria del pensamiento, pues *"el proceso del pensar arranca de una situación problémica"* (p.109). Establece una diferencia entre la situación problémica y el propio problema; la primera es la que presenta elementos desconocidos, poco claros o explícitos, mientras que en el segundo el sujeto tiene conciencia de lo buscado.

Por su parte, el psicólogo Labarrere (1987) plantea que en todo problema interviene *"la actividad psíquica del sujeto". (*p.6)

Como concepto matemático, diferentes autores han dado sus criterios. Polya (1976), sostiene que *"un problema significa buscar conscientemente con alguna acción apropiada para lograr una meta claramente concebida pero no inmediata de alcanzar"* (p.11); Fridman (1977), es del criterio que es "*un modelo de la situación problémica, expresado con ayuda de los símbolos de cualquier lenguaje natural o artificial". (*p.15)

Por su parte, Campistrous & Rizo (1996), plantean que es *"toda situación en la que hay un planteamiento inicial y una exigencia que obliga a transformarlo. La vía para pasar de la situación o planteamiento inicial a la nueva situación exigida tiene que ser desconocida y la persona debe querer hacer la transformación". (*pp. 9-10)

En resumen, el concepto de problema se caracteriza por los aspectos:

1. Expresa una situación inicial (condiciones iniciales o datos)y una final (exigencias).

2. La vía tiene que ser desconocida.

3. El sujeto siente la necesidad de resolver el problema.

4. Exige una intensa actividad cognoscitiva.

En particular, los problemas geométricos no son solo aquellos en que los estudiantes siguen determinada fórmula y/o procedimiento para hallar su solución. De manera general se consideran problemas geométricos aquellas situaciones donde el componente aritmético pasa a un plano inferior y donde cobra mayor importancia para su solución el dominio de las propiedades geométricas.

Existen diferentes criterios de clasificación, por ejemplo:

I. De acuerdo con la manera en que se redacta la información contenida en un problema, la correlación de lo conocido (condiciones o datos) y lo desconocido (exigencias), así como, el tipo de actividad mental que realiza el escolar para su solución. Cruz Ramírez (2006), citando a Pehkonen (1955), propone una clasificación, que a continuación contextualizamos en el caso de la geometría:

1. PROBLEMAS GEOMÉTRICO CERRADOS
   - Problemas geométricos algorítmicos.
   - Problemas geométricos heurísticos.
2. PROBLEMAS GEOMÉTRICO ABIERTOS

   Los *problemas geométricos son cerrados* cuando contienen en su estructura toda la información necesaria para su solución, lo que permite a quien lo resuelve encontrar con facilidad la vía de solución. Este tipo de problema, se subdivide de acuerdo a los procedimientos empleados por los escolares en *algorítmicos* y *heurísticos*.

   Se consideran *problemas geométricos algorítmicos* a aquellos que en su solución se sigue, de manera ordenada, determinada sucesión de pasos o procedimiento.

II. Por otra parte, los problemas geométricos se pueden clasificar atendiendo a la naturaleza de la exigencia en problemas de construcción geométrica, problemas de demostración o problemas de cálculo geométrico.

1. Problemas de construcción geométrica: son aquellos en los que plantea como exigencia la obtención de una figura que debe satisfacer ciertas propiedades o relaciones entre los elementos o magnitudes.

2. Problemas de demostración: son aquellos en los que se demuestra una relación o propiedad geométrica. Aquí se incluyen los problemas de demostración de teoremas.

3. Problemas de cálculo geométrico: son aquellos en los que la exigencia es determinar valores numéricos.

III. Además, en toda la literatura sobre metodología de la enseñanza de la Matemática existe un consenso en cuanto a clasificar los problemas atendiendo a la cantidad de pasos que se tiene que realizar. Aunque existe una tendencia a considerar solamente esta clasificación cuando se refiere a problemas aritméticos, es conveniente aclarar que es válida esta clasificación para los problemas geométricos.

1. Problemas simples: en los casos de los que se resuelven con un solo paso.

2. Problemas compuestos: en los que se resuelven con más de un paso, los compuestos se subdividen en *compuestos independientes* y en *compuestos dependientes*.

IV. Otro criterio de clasificación es el relativo a la *posibilidad o no de solucionar el problema*. Si el problema puede resolverse entonces se dice que es *solucionable* y en el caso contrario *no solucionable*.

También debe tenerse en cuenta si las condiciones iniciales expresan la información de manera explícita o implícita. En el caso que nos ocupa, los problemas geométricos, además de las relaciones o valores de las cantidades de magnitudes, puede o no aparecer la representación de la figura en cuestión.

El dominio de todas estas clasificaciones, le permite a los docentes conocer las distintas características de las condiciones y la exigencia, así como las relaciones entre los conceptos y sus propiedades, permitirá a los docentes seleccionar de manera graduada los problemas geométricos que propondrá a sus estudiantes.

Lo analizado hasta el momento permite plantear que en la resolución de problemas geométricos no le basta al escolar conocer solamente fórmulas, pues desempeñan una importante función el conocimiento de las propiedades de las figuras y cuerpos, la construcción o representación gráfica de los datos, el reconocimiento de relaciones de equivalencia y la realización de conversiones de unidades de longitud, área y volumen.

2.2. Principios para el proceso de enseñanza-aprendizaje de la geometría en la Educación Primaria

El diccionario filosófico de Rosental & Ludin (1981), plantea que el término principio proviene del latín "principium" y significa: "punto de partida, idea rectora, regla fundamental de conducta". Es decir, los principios son bases, fundamentos y postulados sobre los que se apoya una ciencia o una disciplina. De acuerdo con lo anterior, cada ciencia establece sus propios principios y teorías para darle solución a problemas propios de su campo de acción.

La Didáctica de la Matemática como disciplina científica, en constantes cambios y transformaciones, también propone sus propios principios por los que se rige y constituyen aportes a la didáctica general. Se comparte el criterio que *"el tratamiento metodológico de cada contenido de enseñanza tiene sus peculiaridades y determina puntos de vista o postulados generales para su tratamiento".* (Barcia Martínez, 2000, p. 40)

Por esta razón se determinan los postulados más generales del proceso de enseñanza-aprendizaje de la geometría en la Educación Primaria. Estos principios se encuentran estrechamente relacionados con los principios didácticos expuestos por Labarrere Reyes & Valdivia Pairol (1988), pues se han tomado en cuenta sus aspectos más generales en el proceso, de este subsistema educativo.

Los principios que rigen el proceso de enseñanza-aprendizaje de la geometría en la Educación Primaria, y que inciden en el desarrollo de habilidades geométricas, se estructuraron teniendo en cuenta su significado, fundamentación y acciones para su aplicación en el proceso de enseñanza-aprendizaje. En los siguientes apartados se exponen los cinco principios para el desarrollo de habilidades geométricas en la Educación Primaria.

1. Principio del apoyo continuo en los conocimientos históricos

Este principio significa que, en el proceso de enseñanza-aprendizaje de la geometría en la Educación Primaria, se deben impartir contenidos de historia de la geometría, en correspondencia con los avances de esta ciencia y las especificidades de cada grado. Se fundamenta en que la enseñanza de la geometría es producto de conocimientos que se han desarrollado y perfeccionado con el transcurso del tiempo. Por otra parte, al familiarizar a los escolares con elementos de la historia de la ciencia (Savin, 1972), asequibles a ellos, se contribuye a la concepción científica del mundo.

Según De Guzmán (1993,), *"la perspectiva histórica nos acerca a la matemática como ciencia humana, no endiosada, a veces penosamente reptante y en ocasiones falible, pero capaz también de corregir sus errores" (*p. 6). *Este mismo autor, al resaltar la utilización de la historia en el proceso de enseñanza-aprendizaje de las diferentes materias del currículo, plantea que "sería extraordinariamente conveniente que las diversas materias que enseñamos se beneficiaran de la visión histórica… y que a todos nuestros estudiantes se les proporcionara siquiera un breve panorama global del desarrollo histórico de la ciencia que les va a ocupar toda su vida".* (De Guzmán, 1993, p. 7)

Se enuncian como acciones para la aplicación de este principio las siguientes: (1) elaborar curiosidades históricas acorde con los contenidos geométricos que se abordan en el ciclo y las particularidades de los escolares; (2) orientar actividades que se encuentren relacionadas con problemas prácticos que se le han presentado al hombre de manera tradicional; (3) destacar los conocimientos geométricos desarrollados por el hombre a lo largo de la historia de la humanidad; (4) elaborar medios de enseñanza que propicien la utilización de las curiosidades históricas.

Así, por ejemplo, los escolares al comenzar a utilizar las primeras relaciones espaciales para orientarse en el espacio tridimensional (izquierda-derecha, delante-atrás y arriba-abajo), pueden conocer que la noción de distancia fue uno de los primeros conceptos geométricos que descubrió el hombre y que la estimación del tiempo necesario para hacer un viaje lo llevó a utilizar la línea recta, que constituye la distancia más corta entre dos puntos. Debe destacarse igualmente, que en la historia de la humanidad el hombre se ha orientado en el entorno a partir de la observación de los astros y que ha utilizado diferentes instrumentos, que cómo es de suponer se han perfeccionado con el paso del tiempo.

El estudio de las figuras geométricas puede ser el momento en que los escolares conozcan que el círculo es la figura geométrica que primero conoció el hombre; esto se debe a que en la observación del medio que lo rodeaba lo asoció con el sol y la luna. Pueden conocer además, que los conocimientos que tuvieron antiguas culturas sobre la circunferencia, le dio la posibilidad al hombre de crear la rueda y con ella la carreta; pero también las propiedades de la circunferencia fueron utilizadas por el hombre para medir el tiempo.

Al utilizarse los instrumentos de medición y trazado el docente puede apoyarse, para motivar su clase, en el surgimiento y desarrollo de la geometría como ciencia; haciéndole saber a sus escolares que los egipcios fueron los primeros que comenzaron a realizar mediciones, pues necesitaban medir constantemente las fronteras de sus tierras, que eran borradas por las inundaciones del río Nilo; también la regla y el compás han sido los instrumentos de dibujo más utilizados para resolver problemas de construcciones geométricas, desde los geómetras griegos.

En el estudio de los cuerpos geométricos los escolares pueden conocer que los dados, (que tienen forma de cubo) de acuerdo con hallazgos realizados, fueron utilizados por los antiguos egipcios para jugar; durante mucho tiempo el hombre no conoció la forma esférica de la tierra, por esa razón la representó de diversas maneras.

En el segundo ciclo, al resolverse problemas geométricos, los escolares pueden conocer que muchos aspectos de la geometría, como se ha expresado anteriormente, responden a la necesidad de resolverse problemas no solo de agricultura y arquitectura, sino de las diversas esferas sociales.

Por otro lado, al enseñarse la pirámide el docente puede resaltar los conocimientos geométricos de los egipcios y de los pobladores prehispánicos de Centroamérica y Sudamérica, quienes fueron constructores de grandes pirámides.

De hecho, la elaboración de medios de enseñanza por los escolares puede dar lugar también a que los docentes utilicen la historia de la geometría. Ejemplos de estos medios de enseñanza pueden ser modelos de figuras y cuerpos geométricos y el tangram, que es un juego que tiene su origen en la antigua cultura china (León González & Barcia Martínez, 2010).

Se considera necesario que los docentes utilicen los conocimientos históricos como instrumento, durante la introducción de los contenidos geométricos, a partir del uso de curiosidades, acordes con el contenido en cuestión. Para ello deben contar con una cultura matemática, para desplegar un proceso de enseñanza-aprendizaje desarrollador, conforme con las características biológicas y psicológicas de los escolares; siempre y cuando se admita en el proceso.

Este principio se encuentra relacionado, fundamentalmente, con los principios del carácter científico de la enseñanza y el de la asequibilidad, planteados por Labarrere Reyes & Valdivia Pairol (1988), en los cuales se expresa la necesidad de que en el proceso de enseñanza-aprendizaje se incluyan resultados del desarrollo de la ciencia; juega un papel decisivo el docente para relacionar el nuevo conocimiento con los mecanismos de pensamientos de los escolares, en correspondencia con su edad.

De acuerdo con lo analizado, anteriormente, la idea fundamental de este principio radica en la comprensión, por parte de los escolares, de que el desarrollo de histórico de la geometría se encuentra ligado al progreso social del hombre y a su deseo de transformar el mundo en su beneficio.

2. Principio del carácter contextual de los contenidos geométricos

Este principio significa que se debe vincular el proceso de enseñanza-aprendizaje de la geometría con situaciones reales y del entorno para que los escolares puedan contextualizar los conocimientos y habilidades geométricas adquiridas en la solución de situaciones prácticas y argumentar lo realizado, en dependencia de sus particularidades. Se fundamenta en que los conceptos más antiguos de la geometría clásica surgieron como resultado de la interacción de los hombres con la naturaleza, quienes llegaron al conocimiento de las formas geométricas a partir de la observación del entorno. Por otra parte, constituye una de las razones a la cual han hecho referencia pedagogos de diferentes épocas y por la que se aboga en la actualidad en el proceso de enseñanza-aprendizaje de la geometría.

Al respecto, Canals Tolosa (1997), apunta: *"la Geometría hemos de vivirla en la escuela y en toda la vida, ha de ser, tanto para nosotros como para nuestros alumnos, una oportunidad de aumentar* *nuestra capacidad de descubrimiento, nuestra iniciativa y creatividad y nuestra sensibilidad por la belleza de las formas, apreciado tanto en el arte como en la naturaleza y en la globalidad del medio que nos rodea. Es necesario que junto aprendamos a mirar nuestro entorno con unos ojos más geométricos, y que tanto en la calle como en la clase seamos más felices haciendo Geometría". (*p. 31)

Añade esta autora: *"esta idea de la Geometría aprendida intuitivamente a partir de la vida cotidiana, y reforzada en algunos aspectos por las prácticas escolares adecuadas, será en las líneas que siguen como un punto de partida y desearía que fuese también como un telón de fondo que vuelve a aparecer de vez en cuando".* (Canals Tolosa, 1997, p. 32)

Del mismo modo señala que para la introducción y una mejor fijación de los conceptos geométricos el maestro no solo debe mostrarles a sus escolares modelos e ilustraciones de figuras y cuerpos geométricos, sino que debe ayudarlos, además, a observar las verdaderas propiedades de esos figuras y cuerpos presentes en su entorno inmediato, para de esa forma contribuir a una mejor construcción del conocimiento geométrico.

Tal punto de vista es compartido por Alsina Catalá et al. (1989), quienes precisan que *"el entorno, en su sentido más amplio, ha sido y seguirá siendo, el gran reto, el gran manantial y fuente de los estudios geométricos, no sólo para motivar descripciones y modelos sino, lo más interesantes, para que con dichos resultados geométricos pueda incidirse en la transformación de la realidad". (*p. 28)

Por su parte, Petrovski (1986) considera que, en estas actividades espaciales, *"la forma, el tamaño, la ubicación y el desplazamiento de los objetos entre sí, como también el análisis simultáneo de la ubicación del propio cuerpo respecto de los objetos circundantes, se determinan en el proceso de actividad motriz del organismo, y constituye una expresión superior específica de la actividad analítico-sintetizadora que ha sido denominada análisis del espacio". (*p. 245)

La literatura consultada (Alsina Catalá et al., 1989) cita tres tipos de espacio donde se pueden desarrollar habilidades geométricas: (1) microespacio, espacio reducido donde el niño puede realizar actividades experimentales (mesa); (2) mesoespacio, espacio que está al alcance de la vista, donde se pueden realizar pequeños desplazamientos y en el que los objetos fijos funcionan como puntos de referencia (aula, patio); (3) macroespacio, espacio de las grandes dimensiones, enmarcado al aire libre (ciudad, campo).

Las acciones propuestas para la aplicación de este principio en el proceso de enseñanza-aprendizaje son las siguientes: (1) elaborar actividades espaciales que permitan la observación de las propiedades geométricas en el entorno y las abstracciones; (2) destacar la importancia que tienen los conocimientos geométricos para la vida; (3) orientar tareas que impliquen solucionar problemas de la vida práctica a partir de los contenidos geométricos.

En la formación de las primeras nociones geométricas en los escolares se debe partir del entorno para favorecer el tránsito del pensamiento concreto al pensamiento abstracto y contribuir al desarrollo de habilidades geométricas. Por ello, deben predominar actividades de exploración del espacio en las que reconozcan objetos físicos que guardan relación con las formas geométricas; reproducirlos, utilizando figuras y cuerpos geométricos y explicar la razón por la cual tienen una forma determinada.

Del mismo modo, el tratamiento de los movimientos geométricos debe iniciarse con la percepción de elementos del mundo circundante, pues es a partir de la vinculación de estos contenidos con la vida que se realiza el proceso de abstracción y generalización de estos conocimientos.

Este principio guarda relación, esencialmente, con los principios de la relación entre la teoría y la práctica y el del carácter consciente y activo de los alumnos bajo la guía del profesor, enunciados por Labarrere Reyes & Valdivia Pairol (1988), puesto que para lograr mayor desarrollo de habilidades geométricas, el docente debe estructurar actividades prácticas en las que los escolares se involucren con situaciones de la vida.

Interesa resaltar la necesidad de que el proceso de enseñanza-aprendizaje de la geometría esté siempre relacionado con situaciones del entorno social y cultural. Esta relación ayuda a los escolares a reconocer la presencia de la geometría en la práctica y aplicar sus conocimientos geométricos en disímiles esferas.

3. Principio de la utilización de objetos concretos y otros medios de enseñanza

Este principio significa que la utilización de objetos reales (concretos) y otros medios de enseñanza como los recursos tecnológicos en el proceso de enseñanza-aprendizaje de la geometría en la Educación Primaria, bajo orientaciones del docente, constituye la base fundamental para que los escolares se apropien, de acuerdo a sus dificultades, posibilidades e intereses, de los conceptos y procedimientos geométricos y los utilicen en la solución de problemas de la vida práctica; se fundamenta en la utilización del método inductivo (de lo particular a lo general) para reforzar la observación directa y la manipulación como métodos esenciales para la obtención del conocimiento y el desarrollo de habilidades geométricas.

En la enseñanza de la geometría el uso de objetos concretos, como medio de enseñanza, garantiza en los escolares un enfoque tridimensional del espacio y el vínculo directo con la naturaleza. Los objetos concretos son aquellos que poseen una existencia real y material o física, donde se incluyen los modelos geométricos[3]; pero solo en casos excepcionales se debe utilizar, en la introducción de un concepto geométrico, representaciones gráficas e ilustraciones que los sustituyan.

El uso de objetos concretos, en el proceso de enseñanza-aprendizaje de la geometría, contribuye al desarrollo de habilidades geométricas, que inciden en el desarrollo de habilidades intelectuales como: observar, describir, comparar, clasificar, definir, argumentar, modelar, entre otras.

Así pues Piaget, citado por Brihuega Nieto (2006), considera que los escolares "*cuanto más tiempo se dediquen al estudio de lo concreto, cuanto más tiempo empleen en la observación, tanto mejor pasarán, entonces, a la comprensión de las formas abstractas".* (p. 2)

Alsina Catalá et al. (1991), señalan que *"la enseñanza geométrica no debe sucumbir a las limitaciones formales, simbólicas o algebraicas de los conocimientos matemáticos: será precisamente en este primer estadio de sensibilidad donde el tacto, la vista, el dibujo y la manipulación permitirán familiarizar al alumno con todo un mundo de formas, figuras y movimientos sobre el que asentar posteriormente los modelos abstractos". (*p. 1)

Al referirse al uso de los modelos, en el proceso de enseñanza-aprendizaje de la geometría, Junquera Muné (1961) plantea justamente *"no crea el educador que basta la intuición en el sentido de mostrar los cuerpos. No debe tenerlos a la vista de los niños, sino ponerlos en sus manos, para que los tengan y los retengan, observándolos. Debe de haber varias series de cuerpos ya cualesquiera, ya geométricos, y dentro de estas series de cada clase, variando el tamaño, el número de caras, etc. Empeñarse en "hacer" Geometría con un cubo, un prisma, una pirámide, etc., es vanidad". (*p. 512)

Es por eso que en la enseñanza de la geometría, la observación y manipulación de objetos concretos y modelos desde diferentes puntos de vista, por parte de los escolares, constituye la base fundamental para adquirir, de forma sensoperceptual (mediante la vista y el tacto), las primeras propiedades de los conceptos geométricos. De acuerdo con Galperin (1987), en la obtención de conceptos, el pensamiento se mueve de lo concreto a lo abstracto y del contenido abstracto del concepto al conocimiento amplio relacionado con él, en el que se aplica el concepto a nuevos casos particulares.

Otros medios de enseñanza que deben ser aprovechados para el desarrollo de habilidades geométricas en los escolares son los diferentes recursos tecnológicos (medios audiovisuales y aplicaciones informáticas), que al utilizarse en el contexto educativo realizan una serie de funciones básicas, propias de estos medios, aparte de las específicas, determinadas por el uso que los docentes hacen de ellos. El Consejo Estadounidense de Profesores de Matemáticas (2000), destaca la importancia que ejerce la tecnología, en las matemáticas que se enseñan, pues la consideran una herramienta esencial para enseñar, aprender y "hacer" matemáticas.

Las acciones propuestas para la aplicación de este principio son las que siguen: (1) utilizar objetos concretos en la introducción de los conceptos y procedimientos geométricos; (2) orientar actividades experimentales para que los escolares descubran las propiedades geométricas; (3) propiciar la elaboración de modelos geométricos, por parte de los escolares; (4) seleccionar, evaluar y utilizar recursos tecnológicos en el proceso de enseñanza-aprendizaje de la geometría.

De esta forma, al elaborar el concepto cubo con ayuda de un concepto genérico superior (en este caso ortoedro), mediante la indicación de una o varias características formativas de tipos (tiene sus caras cuadradas e iguales), se les presentan a los escolares diferentes ejemplos de la misma clase y de otras clases, para analizarlos, compararlos e identificar en ellos las características esenciales comunes (invariables), que luego de ser halladas son abstraídas y sintetizadas mentalmente.

Es entonces, cuando el docente introduce el nombre del concepto y comienza a elaborar la definición, paso a paso, con ayuda de los escolares y en dependencia de cada uno de los grados; posteriormente el concepto elaborado es profundizado mediante la búsqueda de nuevos representantes. Desde este punto de vista, se considera que una vez que los escolares hayan manipulado el objeto, estarán en condiciones de generalizar mentalmente las propiedades conocidas y transferirlas o adaptarlas en la solución de situaciones análogas y/o nuevas.

Por otra parte, resulta provechoso para el desarrollo de habilidades geométricas, en la Educación Primaria, que los escolares sean capaces de elaborar, por sí solos, con ayuda del maestro u otros compañeros, modelos de figuras y cuerpos geométricos, con diferentes materiales como: papel, cartón, plastilina, alambre, madera, puntillas, tijera, colores o tempera.

Se considera también importante que se realicen actividades experimentales en cuadrículas y en el geoplano para que los escolares comprendan las propiedades de las figuras y movimientos geométricos y puedan aplicar los conocimientos adquiridos en la resolución de problemas geométricos: de fundamentación del valor de verdad de proposiciones y de construcciones.

En relación con la utilización de la tecnología educativa en el proceso de enseñanza-aprendizaje de la geometría en la Educación Primaria, debe plantearse que, en ocasiones, presenta desventajas con respecto al resto de los medios de enseñanza tradicionales de esta materia y más en estos grados en que el desarrollo de habilidades geométricas se realiza a partir de situaciones reales en el entorno. No obstante, no se puede olvidar que le propician a los docentes, en gran medida, la oportunidad de encauzar los contenidos geométricos de una manera más atractiva e interesante.

[3] Puig Adam, citado por Cajaraville Pegito (1989, p. 19), define los modelos, en este contexto como *"todo aquel material capaz de traducir o de sugerir ideas matemáticas".*

Es por eso que resulta imprescindible, para los docentes, aprovechar las ventajas que el proceso tecnológico pone a su disposición, sin restarle nunca valor a los medios tradicionales, para ofrecer a los escolares los conocimientos de una forma más novedosa y acorde con los tiempos modernos, pues su utilización en el proceso de enseñanza-aprendizaje de la geometría resulta necesario debido a las exigencias que la sociedad en su conjunto ejerce sobre la escuela y para el logro de un aprendizaje desarrollador.

Aunque la unidad de la instrucción y la educación se encuentra presente en todos los principios propuestos, el de la utilización de objetos concretos y otros medios de enseñanza, se vincula, principalmente, con el del carácter educativo de la enseñanza, además del principio del carácter audiovisual de la enseñanza: unión de lo concreto y lo abstracto, el de la atención a las diferencias individuales dentro del carácter colectivo del proceso docente-educativo y el del carácter consciente y activo de los alumnos bajo la guía del profesor, planteados por Labarrere Reyes & Valdivia Pairol (1988), pues establece correspondencia entre los objetivos de la educación, las leyes del desarrollo físico e intelectual de los escolares, la revolución científico-técnica y las exigencias de la escuela primaria contemporánea.

4. Principio de la relación intra e intermateria de la enseñanza de la geometría

Este principio significa que se debe relacionar el proceso de enseñanza-aprendizaje de la geometría con otras partes de la matemática y materias del currículo. Se fundamenta en la necesidad de lograr la solidez en la asimilación de los conocimientos y habilidades geométricas.

Las acciones que se proponen para la aplicación de este principio son las siguientes: (1) relacionar el proceso de enseñanza-aprendizaje de la geometría con los componentes: numeración, cálculo, magnitudes, problemas aritméticos, estadística, y otras partes de la matemática; (2) vincular el proceso de enseñanza-aprendizaje de la geometría con los componentes de la asignatura Lengua Española y las asignaturas: El mundo en que vivimos (primer ciclo), Ciencias Naturales (segundo siclo) y Educación Plástica.

En el proceso de enseñanza-aprendizaje de la geometría en la Educación Primaria los contenidos de otras partes de la Matemática sirven de ayuda en la adquisición de habilidades geométricas. Tal es el caso de los componentes: numeración, cálculo, magnitudes, problemas aritméticos y estadística.

En el componente numeración, en los primeros grados, los conjuntos formados por figuras y cuerpos geométricos sirven de base para identificar, representar, leer y comparar números naturales. También para resolver ejercicios formales de las cuatro operaciones fundamentales de cálculo: adición, sustracción, multiplicación y división. Del mismo modo, a partir del tercer grado, las figuras geométricas suelen utilizarse para la representación gráfica de fracciones.

Por otro lado se encuentra el componente magnitudes, que desde el surgimiento de la geometría se halla ligado a esta rama de las matemáticas, pues a lo largo de la historia muchas construcciones geométricas se han realizado con ayuda de las unidades de medida.

Los escolares mediante la vinculación de los contenidos del componente magnitudes y los geométricos pueden estimar y medir longitudes, así como realizar construcciones geométricas formales y resolver problemas geométricos; pues la realización de actividades de comparación de cantidades de figuras y cuerpos geométricos, junto a la introducción del concepto lados consecutivos, constituyen condiciones previas para el tratamiento de los contenidos de perímetro, área y volumen.

La relación parte-todo, que es muy usada en la resolución de problemas aritméticos, constituye una vía para desarrollar la habilidad reconocer objetos geométricos. A partir de esta relación se puede aislar, de su contexto, la figura general, que está compuesta por varias partes. Se considera oportuno, además, utilizar elementos de la teoría combinatoria (León González & Barcia Martínez, 2006) siempre y cuando la situación lo propicie, para establecer estrategias que contribuyan a desarrollar esta habilidad en los escolares.

En la Educación Primaria, a partir del tercer grado, se imparten asimismo las primeras nociones de estadística en la resolución de problemas aritméticos, vinculadas con situaciones de diferentes esferas de la vida y donde son interpretadas por los escolares, tablas y gráficos, que representan de forma geométrica datos numéricos.

Pero también, se pueden relacionar o vincular los conceptos y procedimientos geométricos con el resto de las asignaturas del currículo, para que los escolares comprendan su aplicabilidad en diferentes contextos. Los componentes de la asignatura Lengua Española: gramática, producción textual, lectura, caligrafía y ortografía, sirven de ayuda para que los escolares de estos grados comprendan las propiedades de las figuras, cuerpos y movimientos geométricos; usen apropiadamente los términos geométricos, al denominar estos objetos geométricos; y expongan con fluidez y coherencia, ya sea de forma oral o escrita, sus argumentos en torno a la veracidad de cualquier proposición geométrica.

Las potencialidades que brinda la naturaleza para el estudio de situaciones geométricas pueden ser vistas, además, desde la asignaturas: "El mundo en que vivimos", que ayuda a los escolares a observar y comprender los procesos naturales y sociales que ocurren en un momento histórico determinado. Su vinculación con las clases de geometría puede constituir uno de los pilares básicos para su enseñanza, pues mediante su estudio los escolares pueden percibir la diversidad de formas del entorno y la razón por la que ciertos "seres vivos" y "objetos no vivos" guardan relación con una forma geométrica específica; determinar en un plano la distancia real entre dos puntos, realizando mediciones de segmentos; orientarse en el espacio, mediante los puntos cardinales (Norte, Sur, Este, Oeste). Pueden también explicarse la relación de los movimientos geométricos con fenómenos físicos que ocurren a su alrededor como: la sucesión de los días y las noches; el cambio de las estaciones, a partir de los movimientos de rotación y traslación del planeta Tierra; la proyección de una película, los movimientos de un ascensor, entre otros.

Otra de las asignaturas del currículo con la que se puede vincular la enseñanza de la geometría en la Educación Primaria es con la Educación Plástica. Recuérdese que durante mucho tiempo los planes de estudio para la enseñanza de la geometría contribuían a la formación estética de los escolares, a partir de la apreciación y las creaciones artísticas.

La Educación Plástica facilita la formación integral de los escolares, pues se relaciona con todas las materias del currículo y proporciona un alto nivel de conocimientos que los escolares reflejan en sus representaciones gráficas. Está dirigida, también, a *"la familiarización de los niños con todos los fenómenos y objetos del mundo circundante, tanto naturales, como creados por el hombre".* (Ruiz Espín et al., 2000, p. 30)

Las actividades de pintar, dibujar, modelar, recortar, componer y pegar facilitan el desarrollo de diversas acciones mentales y propician un mayor desarrollo de habilidades; además de perfeccionar la percepción visual y espacial. De igual forma resultan necesarias para ambas asignaturas actividades de diferenciación sensorial de forma, color, textura y tamaño de los objetos naturales, gráficos e industriales.

Este principio se relaciona, principalmente, con el de la solidez en la asimilación de los conocimientos, habilidades y hábitos y con el de sistematización de la enseñanza, determinados por Labarrere Reyes & Valdivia Pairol (1988). A partir de la vinculación de los contenidos geométricos con otros componentes de la Matemática y otras materias del currículo, el docente puede contribuir a que los escolares consoliden y asimilen los conocimientos y habilidades adquiridas, las cuales serán evaluadas por el docente durante todo el proceso de desarrollo de habilidades.

5. Principio del pensamiento geométrico abstracto

Este principio significa que en la enseñanza de la geometría se debe partir de la experiencia real de los escolares hasta alcanzar las generalizaciones teóricas. Se fundamenta en la necesidad de emplear convenientemente los procesos analítico, sintético, inductivo y deductivo desde las edades tempranas, para estimular el desarrollo intelectual de los escolares y la aplicabilidad de los contenidos geométricos.

El pensamiento geométrico, según Proenza Garrido (2002), *"es una forma de pensamiento matemático, pero no exclusivo de ella y se basa en el conocimiento de un modelo del espacio físico tridimensional" (*p. 37). Por otra parte, el pensamiento abstracto es el proceso psíquico que permite a un individuo comprender conceptos de objetos y establecer relaciones entre ellos, sin tenerlos de manera concreta.

El pensamiento abstracto se comienza a desarrollar, en los niños de edad escolar, en sus formas más sencillas y siempre, sobre la base de la experiencia práctica y sensorial, pues nunca se desliga completamente de las sensaciones, percepciones y representaciones, hasta que se alcanzan niveles superiores en la adolescencia, cuando se comienza a operar, no solo con conceptos aislados, sino con clases o sistemas completos de conceptos; pues *"la abstracción presupone una división mental del fenómeno u objeto en sus propiedades, relaciones partes, grados de desarrollo, etc". (*Konstantinov et al., 1980, p. 240)

Se proponen como acciones para la aplicación de este principio las que se muestran a continuación: (1) ascender gradualmente los niveles de complejidad de las tareas propuestas hasta prescindir de las representaciones de figuras y cuerpos geométricos, siempre que se pueda; (2) elaborar actividades en las cuales los escolares establezcan relación entre conceptos; (3) proponer actividades en las que los escolares generalicen las propiedades geométricas conocidas por vía sensoperceptual en la solución de situaciones problémicas del entorno social y cultural.

Tal como se ha indicado en la Educación Primaria se comienza a desarrollar el pensamiento geométrico abstracto partiendo de la observación y manipulación de objetos concretos, puesto que mediante estas actividades se desarrolla la capacidad de analizar, comparar y generalizar y una vez que aumenta el dominio de las propiedades de las figuras, cuerpos y movimientos geométricos se amplía la capacidad de establecer relaciones entre conceptos.

Es curioso advertir, como las actividades experimentales en las que los escolares comienzan a reconocer, comprender y descubrir las propiedades de las figuras (cantidad de lados y vértices, longitud de los lados opuestos y consecutivos; la relación de posición de los lados opuestos y consecutivos) y cuerpos geométricos (cantidad de caras, vértices y aristas, si están limitados por superficies planas, curvas o planas y curvas, etcétera), posteriormente serán utilizadas para reconocer características diferentes (variables) y comunes (invariables) entre las figuras y entre los cuerpos geométricos; las relaciones entre conceptos geométricos (principalmente el orden superior e inferior, de acuerdo con los grados); trazar y/o construir figuras y cuerpos geométricos, donde se establece la relación entre conceptos; y argumentar la veracidad de proposiciones geométricas dadas.

De igual modo actividades donde los escolares reconozcan el procedimiento utilizado para mover figuras en el plano; además de realizar algunos movimientos sencillos, posibilita que comprendan las propiedades que cumplen cada uno de los movimientos geométricos y las generalidades que se establecen entre ellos.

Este principio alcanza su máxima expresión en el del carácter audiovisual de la enseñanza: unión de lo concreto y lo abstracto, el del carácter consciente y activo de los alumnos bajo la guía del profesor y el de la atención a las diferencias individuales dentro del carácter colectivo del proceso docente-educativo, enunciados Labarrere Reyes & Valdivia Pairol (1988), pues el pensamiento abstracto, de acuerdo con la teoría del conocimiento marxista-leninista (Lenin, 1964; Konstantinov et al., 1980) no es la última etapa del proceso del conocimiento; la más importante es la ascensión del pensamiento de lo abstracto a lo concreto, cuando el escolar llega a representar y transformar la realidad objetiva. Es de esta forma en que los conceptos y procedimientos geométricos adquiridos, mediante la práctica, bajo la ayuda del docente, son utilizados nuevamente en ella, cuando le dan solución a situaciones de la vida cotidiana.

Carácter sistémico de los principios propuestos

Los principios planteados se encuentran ligados íntimamente y forman un sistema, articulado en función de los fines de la educación. De modo que cada principio cumple con determinados objetivos en el proceso de enseñanza-aprendizaje de la geometría y la finalidad de uno se subordina, de forma ordenada, al resto del sistema.

Se entiende como sistema el "*conjunto de componentes interrelacionados entre sí, desde el punto de vista estático y dinámico, cuyo funcionamiento está dirigido al logro de determinados objetivos, que posibilitan resolver una situación problémica, bajo determinadas condiciones externas".* (Álvarez de Zayas, 1989, p. 25)

Al tomar como referencia la definición anteriormente expuesta puede señalarse que los principios para el desarrollo de habilidades geométricas en la Educación Primaria conforman un sistema debido a: las relaciones que se establecen entre ellos; la influencia que ejercen sobre las categorías del proceso de enseñanza-aprendizaje; el fin común que persiguen (contribuir al desarrollo de habilidades geométricas en la Educación Primaria); y la jerarquización y centralización del principio del carácter contextual de los contenidos geométricos como elemento rector.

De esta forma, el principio del apoyo continuo en los conocimientos históricos, se relaciona fundamentalmente, con el del carácter contextual de los contenidos geométricos, con el de utilización de objetos concretos y otros medios de enseñanza y el del pensamiento geométrico abstracto. Esta relación está dada en que los avances históricos de la geometría se encuentran en la solución de problemas que se le han presentado al hombre en el entorno social y cultural a lo largo de centurias y que han contribuido a su desarrollo como ciencia.

Del mismo modo, el estudio de los objetos concretos, a través del tiempo, ha enriquecido los conocimientos geométricos; pero además, la historia de la geometría puede ser aprovechada en el tratamiento del proceso de enseñanza-aprendizaje, al elaborar medios de enseñanza y desarrollar habilidades. Por otra parte, puede afirmarse que la solución de problemas cotidianos, a partir de las abstracciones geométricas ha servido de base, históricamente, para la consolidación de los fundamentos y postulados de la geometría.

El principio de utilización de objetos concretos y otros medios de enseñanza se vincula además del principio del apoyo continuo en los conocimientos históricos con el del carácter contextual de los contenidos geométricos y el de la relación intra e intermateria de la enseñanza de la geometría. Ese vínculo se encuentra en que los objetos concretos y medios de enseñanza que se utilizan para el tratamiento de los contenidos geométricos y el desarrollo de habilidades guardan relación con la realidad; se establece así relación entre lo conocido y lo desconocido, luego del estudio de otros componentes de la Matemática y materias del currículo.

El principio de la relación intra e intermateria de la enseñanza de la geometría se relaciona además del principio del apoyo continuo en los conocimientos históricos y el de utilización de objetos concretos y otros medios de enseñanza con el del carácter contextual de los contenidos geométricos y el del pensamiento geométrico abstracto, puesto que para lograr la solidez en la asimilación de los conocimientos y el desarrollo de habilidades geométrica es necesario partir de las situaciones problémicas que se le presentan a los escolares en el contexto social y cultural en el que viven para alcanzar las generalizaciones teóricas.

Por último, el principio del pensamiento geométrico abstracto se encuentra directamente vinculado con todos los propuestos, como consecuencia lógica de la teoría del conocimiento marxista-leninista, pues refleja la unidad de lo concreto y lo abstracto.

En el esquema que se presenta a continuación se ilustra la relación existente entre los principios propuestos.

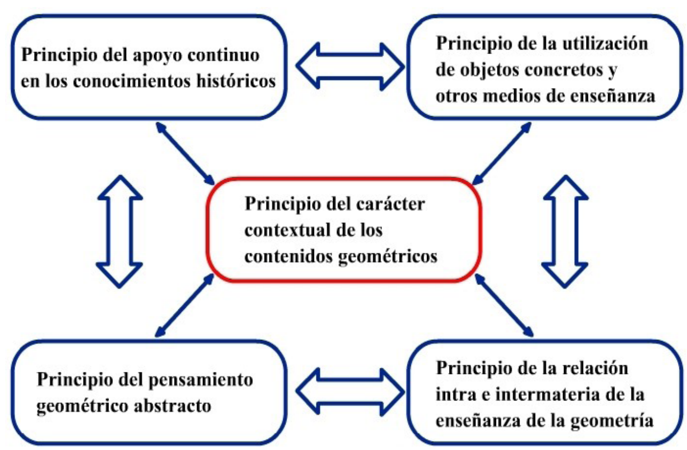


Figura 1. Carácter sistémico de los principios para el desarrollo de habilidades geométricas en la Educación Primaria.

Se considera como eje central para el desarrollo de habilidades geométricas en la Educación Primaria el "principio del carácter contextual de los contenidos geométricos": desde donde debe partir y hacia donde debe tributar el proceso de enseñanza-aprendizaje de la geometría desde los primeros grados de la enseñanza general.

2.3. Acciones y operaciones para el desarrollo de habilidades geométricas en la Educación Primaria

Las habilidades reconocer objetos geométricos, trazar y/o construir; argumentar proposiciones geométricas y resolver problemas geométricos, como habilidades específicas de la geometría en la Educación Primaria, exigen que el escolar efectúe determinadas acciones y operaciones prácticas e intelectuales, como producto de la ejercitación, que puede haber automatizado o no, convertidas en hábitos y habilidades ya adquiridas, al aplicar conocimientos previos.

Por esta razón se consideró necesario proponer las acciones y operaciones más generales para las habilidades geométricas que se desarrollan en estos grados. Lo anterior permite esclarecer cómo ocurre este proceso, de manera planificada, orientada y organizada, desde el plano externo al interno y puesto en práctica nuevamente.

Esta propuesta de acciones y operaciones se realizó siguiendo los modos y procedimientos para modelar la actividad cognoscitiva, señalados por Talízina (1988). De lo anterior se asume el primero de los modos: el teórico-experimental; mientras que de los procedimientos, de acuerdo a las funciones, se toman los que permiten analizar independientemente todos los fenómenos particulares que son objeto de estudio; y acorde con el contenido, los lógicos; unido a la primera de las vías, la que al comienzo forma acciones aisladas, que posteriormente se unen. De esta forma, puede ser adaptada en todas las esferas de la actividad cognoscitiva. La propuesta aparece reflejada en las tablas siguientes.

Tabla 2. Propuesta de acciones y operaciones para el desarrollo de la habilidad geométrica reconocer objetos geométricos.

Habilidad geométrica	Acciones	Operaciones
Reconocer objetos geométricos	1. Percibir	_Interactuar con el objeto geométrico, de manera visual y táctil.
	2. Analizar	_Descomponer el objeto geométrico en cada una de sus partes, para conocer sus propiedades esenciales.
	3. Relacionar	_Descubrir los nexos que existen entre ese objeto geométrico con otros.
	4. Identificar	_Seleccionar el objeto geométrico dentro de un número determinado de objetos, a partir de sus propiedades esenciales y/o generales.

Tabla 3. Propuesta de acciones y operaciones para el desarrollo de la habilidad geométrica trazar y/o construir.

Habilidad geométrica	Acciones	Operaciones
Trazar y/o construir	1. Observar	_Percibir visualmente el objeto geométrico. _Establecer correspondencia entre el objeto geométrico y sus propiedades.
	2. Representar	_Materializar el objeto geométrico, a partir de un conjunto de pasos, diversos materiales (varillas, desarrollos planos, plastilina, etcétera) e instrumentos de dibujo.
	3. Comprobar	_Analizar la validez del procedimiento utilizado.

Tabla 4. Propuesta de acciones y operaciones para el desarrollo de la habilidad geométrica argumentar proposiciones geométricas.

Habilidad geométrica	Acciones	Operaciones
Argumentar proposiciones geométricas	1. Reconocer	_Identificar las propiedades esenciales y/o generales de un objeto geométrico.
	2. Describir	_Enunciar las propiedades esenciales y/o generales de un objeto geométrico, utilizando el lenguaje común y el geométrico.
	3. Interpretar	_Elaborar conclusiones acerca de los elementos y relaciones de los objetos geométricos.
	4. Explicar	_Expresar razones que confirman lo planteado, a partir de las propiedades esenciales y/o generales de los objetos geométricos.

Tabla 5. Propuesta de acciones y operaciones para el desarrollo de la habilidad geométrica resolver problemas geométricos.

Habilidad geométrica	Acciones	Operaciones
Resolver problemas geométricos	1. Interpretar	_Comprender la situación problémica.
	2. Representar	_ Descomponer el objeto geométrico en cada una de sus partes (lo conocido y desconocido).
	3. Formular	_Establecer un procedimiento de solución (algorítmico o heurístico).
	4. Comprobar	_Demostrar la validez del procedimiento utilizado.
	5. Explicar	_Describir el procedimiento de solución utilizado.

Debe señalarse que esta propuesta de acciones y operaciones, para cada una de las habilidades geométricas del primer ciclo de la Educación Primaria, no debe seguirse rígidamente, puesto que este proceso tiene un carácter sistémico y en ocasiones en el desarrollo de una habilidad geométrica específica se necesita de otra habilidad o de sus acciones y operaciones.

De acuerdo con lo analizado, también, pueden darse casos de escolares, que en la ejecución de las actividades propuestas por el docente, no necesiten algunas de las acciones y operaciones para el desarrollo de una habilidad geométrica determinada y avancen directamente hacia las últimas.

2.4. Niveles e indicadores para orientar y evaluar el proceso de desarrollo de habilidades geométricas en la Educación Primaria

Los niveles para orientar y evaluar el proceso de desarrollo de habilidades geométricas en la Educación Primaria, propuestos fueron determinados a partir de las acciones y operaciones prácticas e intelectuales que debe realizar el escolar y de la opinión de los docentes; se arribó a la conclusión que para desarrollar habilidades geométricas, los escolares deben: observar objetos concretos, experimentar con ellos para descubrir sus propiedades y por último, establecer relaciones entre las figuras, entre los cuerpos y entre los movimientos geométricos.

A partir de estas ideas se propone una clasificación de tres niveles por los cuales transita el proceso de desarrollo de habilidades, en cada contenido geométrico, que aunque se presentan de forma aislada, para una mejor comprensión, forman un todo y cada nivel constituye condición previa para alcanzar el nivel superior. Los niveles para el desarrollo de habilidades geométricas en la Educación Primaria son:

Nivel 1 (concreción): el escolar, previamente orientado por el docente u otro compañero de grupo, reconoce formas y movimientos geométricos en el entorno, en modelos y en representaciones gráficas. Observa las diferencias entre las figuras, entre los cuerpos y entre los movimientos geométricos, pero no puede explicar con propiedad en qué radican. Reproduce y construye de manera elemental figuras y cuerpos geométricos; realiza descripciones utilizando el lenguaje común, combinando símbolos y términos geométricos; e identifica, en algunos casos, el procedimiento para resolver problemas geométricos.

Nivel 2 (experimentación): el escolar actúa con cierta independencia. Comprende las propiedades de las figuras, los cuerpos y movimientos geométricos, a partir de la realización de actividades de manipulación e indagación, las que utiliza para explicar las diferencias. Representa y construye figuras y cuerpos geométricos dadas las orientaciones en el espacio, aplicando un procedimiento. Utiliza el lenguaje común y el simbólico, en función de la apropiación de la terminología propia de esta materia y al argumentar. Resuelve problemas geométricos a partir del dominio de las propiedades de las figuras y cuerpos.

Nivel 3 (abstracción): el escolar en este nivel actúa con independencia. Se representa mentalmente los objetos geométricos y es capaz de operar con ellos. Establece relaciones entre las figuras, entre los cuerpos y entre los movimientos geométricos, a partir de sus diferencias y semejanzas, las que utiliza en las construcciones geométricas y al argumentar el valor de verdad de proposiciones dadas. Resuelve problemas geométricos que relacionan: perímetro- área (rectángulo) y área total-volumen (cuerpos geométricos). Utiliza las habilidades geométricas adquiridas en la adquisición de nuevas habilidades, contenidos matemáticos y/o de otras materias; puede, además, darle solución a situaciones de la cotidianidad.

A continuación se representa gráficamente cada uno de los niveles propuestos, así como la relación existente entre ellos.

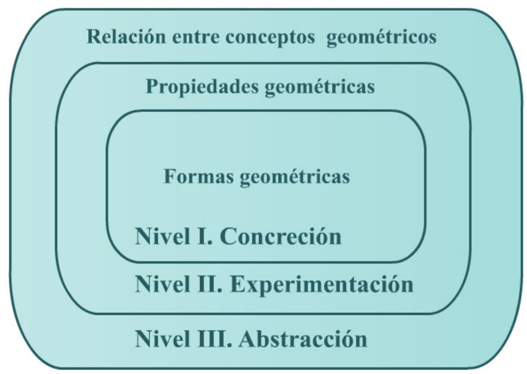


Figura 3. Relación de los niveles para el desarrollo de habilidades geométricas en el primer ciclo de la Educación Primaria.

Para evaluar el nivel de desarrollo de las habilidades geométricas el docente debe tener en cuenta, también, indicadores, que constituyen elementos que señalan el estado en el que se encuentra el escolar en el objeto geométrico estudiado y le permiten al docente moverlo al deseado, a partir de actividades. De esta manera, se sugieren los indicadores que se muestran en las tablas siguientes; relacionados, además, con las acciones y operaciones que aparecen en el epígrafe anterior.

Para evaluar el nivel de desarrollo de las habilidades geométricas el docente debe tener en cuenta, también, indicadores, que constituyen elementos que señalan el estado en el que se encuentra el escolar en el objeto geométrico estudiado y le permiten al docente moverlo al deseado, a partir de actividades. De esta manera, se sugieren los indicadores que se muestran en las tablas siguientes; relacionados, además, con las acciones y operaciones que aparecen en el epígrafe anterior.

Tabla 6. Indicadores para orientar y evaluar el proceso de desarrollo de habilidades geométricas en el nivel concreción.

Nivel I (concreción)			
Habilidades geométricas			
Reconocer objetos geométricos	Trazar y/o construir	Argumentar proposiciones geométricas	Resolver problemas geométricos
1. Determina formas en el medio a partir de un modelo geométrico dado.	1. Reproduce objetos físicos utilizando las formas geométricas.	1. Hace corresponder una denominación dada a la figura o el cuerpo geométrico correspondiente.	1. Conoce las unidades del Sistema Internacional de Medidas: longitud, área y volumen.
2. Determina formas y movimientos geométricos en el medio a partir de objetos concretos dados.	2. Reproduce figuras (en papel cuadriculado, con varillas o plantilla) y cuerpos geométricos (con varillas) a partir de un modelo dado.	2. Denomina figuras y cuerpos geométricos con el vocablo correspondiente.	2. Determina la longitud de los lados de una figura geométrica.
3. Determina formas geométricas en el medio a partir de una denominación dada.	3. Representa puntos y rectas con los instrumentos de trazado necesarios.	3. Denota y nombra figuras geométricas.	3. Determina la amplitud de ángulos, perímetro, áreas (rectángulo y ortoedro) y volumen de cuerpos geométricos (ortoedro).
4. Identifica movimientos geométricos (del espacio y el plano) en representaciones gráficas, sobre papel cuadriculado y en diferentes posiciones.			
5. Identifica figuras y cuerpos en series geométricas.			
6. Identifica figuras planas al observar cuerpos geométricos desde diferentes posiciones.			
7. Relaciona desarrollo con cuerpos geométricos dados.			
8. Identifica cantidad de cubos en un apilamiento.			
9. Identifica figuras en otras compuestas en las que solamente aparece la figura en cuestión y no están unas incluidas dentro de otras.			

Tabla 7. Indicadores para orientar y evaluar el proceso de desarrollo de habilidades geométricas en el nivel experimentación.

Nivel II (experimentación)			
Habilidades geométricas			
Reconocer objetos geométricos	Trazar y/o construir	Argumentar proposiciones geométricas	Resolver problemas geométricos
1. Selecciona movimientos de orientación espacial realizados utilizando las relaciones izquierda-derecha, delante-atrás, arriba-abajo, norte-sur, este-oeste.	1. Representa rectas (paralelas y perpendiculares), segmentos y ángulos.	1. Describe las figuras y los cuerpos geométricos.	1. Compara el volumen y la capacidad de cuerpos.
2. Selecciona formas y movimientos geométricos en el medio a partir de una denominación dada y viceversa.	2. Traza ejes de simetría en objetos concretos y en figuras geométricas.	2. Interpreta frases que describen las figuras y los cuerpos geométricos.	2. Domina el procedimiento para la realización de conversiones con las unidades de longitud, área y volumen.
3. Analiza propiedades de las figuras, cuerpos y movimientos geométricos.	3. Representa rectángulos y cuadrados sobre papel cuadriculado dadas las orientaciones en el espacio.	3. Explica a partir del dominio de las propiedades geométricas.	3. Resuelve problemas geométricos de perímetro, área y volumen, teniendo en cuenta las propiedades de las figuras y cuerpos geométricos.
4. Clasifica figuras y cuerpos geométricos, de acuerdo a sus propiedades.	4. Representa figuras (con varillas y plantilla) y cuerpos geométricos (con varillas) teniendo en cuenta sus propiedades.		
5. Compara figuras y cuerpos geométricos.	5. Desarrolla construcciones geométricas formales con los instrumentos de trazado (circunferencia, paralelogramo, rectángulo y cuadrado, etcétera).		
6. Identifica cómo se obtiene por movimiento una imagen a partir de la figura original.	6. Elabora figuras geométricas dado un número de elementos.		
7. Identifica cantidad de cubos en un apilamiento representado gráficamente.	7. Obtiene otras figuras y cuerpos geométricos a partir de los anteriores.		
8. Identifica cantidades necesarias de figuras y cuerpos geométricos para formar otros.			
9. Identifica figuras en otras compuestas en las que solamente aparece la figura en cuestión y están incluidas unas dentro de otras.			

Tabla 8. Indicadores para orientar y evaluar el proceso de desarrollo de habilidades geométricas en el nivel abstracción.

<table>
<tr><th colspan="4">Nivel III (abstracción)</th></tr>
<tr><th colspan="4">Habilidades geométricas</th></tr>
<tr><td>Habilidades geométricas</td><td>Trazar y/o construir</td><td>Argumentar proposiciones geométricas</td><td>Resolver problemas geométricos</td></tr>
<tr><td>1. Compara cantidad de veces que aparecen dos tipos de figuras sin expresar cantidades, a partir del reconocimiento de las figuras en una compuesta.</td><td rowspan="5">1. Representa figuras (a partir de otras, con varillas, plantilla e instrumentos de trazado) y cuerpos geométricos (con varillas) donde se establece la relación entre conceptos.</td><td>1. Explica situaciones geométricas en el medio que guardan relación con las unidades de magnitud.</td><td>1. Resuelve problemas geométricos en que se combinan el perímetro y el área.</td></tr>
<tr><td>2. Compara figuras y cuerpos geométricos a partir de propiedades.</td><td>2. Explica a partir del dominio de las relaciones entre conceptos geométricos.</td><td rowspan="4">2. Resuelve problemas geométricos donde se relaciona el área total y el volumen de cuerpos geométricos.</td></tr>
<tr><td>3. Identifica en una composición de movimientos como se obtiene una imagen a partir de la figura original.</td><td rowspan="3">3. Expresa razones por las cuales objetos físicos guardan relación con propiedades geométricas.</td></tr>
<tr><td>4. Identifica situaciones geométricas en el medio que guardan relación con las unidades de magnitud.</td></tr>
<tr><td>5. Relaciona figuras y cuerpos geométricos a partir de sus propiedades.</td></tr>
</table>

Capítulo III. El tratamiento metodológico de los conceptos geométricos en la Educación Primaria

"El conocimiento geométrico no se adquiere... si al mismo tiempo no se pone en juego la experiencia y la mente del que los recibe".

(Canals Tolosa, 1997)

3.1. Sugerencias metodológicas para el tratamiento de los conceptos de figuras geométricas en el primer ciclo de la Educación Primaria

En la enseñanza de la geometría plana existen tres conceptos elementales, que no se definen y que se introducen por vía intuitiva, partiendo siempre de la realidad objetiva; tales conceptos son: punto, recta y plano.

En el tratamiento del concepto *punto* se parte de las siguientes nociones:

1. La marca realizada con un lápiz.

2. Un grano de arena.

3. La cabeza de un alfiler.

4. El lugar donde se clava una puntilla.

5. La esquina de la casa, donde se unen tres bordes de paredes.

En la introducción de este contenido se deben destacar aspectos fundamentales tales como:

1. Los puntos se representan con una cruz y se denotan con letra mayúscula, de imprenta.

2. La existencia de muchos puntos (infinitos, aunque este término no se emplee).

3. La diferencia entre el ente geométrico punto, su representación y su nombre.

El concepto de punto va muy ligado al de *recta*, pues se dice que en una recta hay infinitos puntos. Algunas nociones a tener en cuenta al introducir este concepto son las siguientes:

1. Los tendidos eléctricos.

2. Una cuerda extendida.

3. El borde de la regla.

Lo esencial en este contenido es que los escolares reconozcan que existen diferentes tipos de líneas, a partir de su representación en varias posiciones (horizontal, vertical u oblicua), dentro de las cuales se encuentra las líneas rectas.

Deben conocer además que las rectas se denotan con una letra minúscula o dos mayúsculas, al destacarse en la recta dos puntos. Es necesario que los escolares dominen que las rectas no se pueden medir; que, al igual que los puntos, se pueden trazar tantas como se deseen y la forma correcta para comprobar si una línea es o no recta, es con el uso de la regla.

En los primeros grados, de la escuela primaria, los escolares comienzan a familiarizarse con la regla, que no solo la utilizan para trazar rectas, sino también para trazar otras figuras geométricas, que posteriormente conocerán. Es necesario que los maestros, desde este momento, comiencen a inculcar en los escolares hábitos de limpieza y precisión en el trazado de figuras, y en el uso de los instrumentos de dibujo.

Como parte de la relación que existe entre el concepto punto y recta, uno de los objetivos principales de este contenido es que los escolares reconozcan que a partir de un punto se pueden trazar infinitas rectas y dados dos puntos, diferentes, se puede trazar una y solo una recta (relación de incidencia "… pasa por…").

Es preciso que los escolares puedan comprender, además, que existen puntos por los que una recta no pasa, que esos puntos no están en la recta; y que dados tres puntos cualesquiera de una recta, existe uno y solo uno de ellos que está situado entre los otros dos (relación de orden "... está situado entre... y...").

Otra cuestión importante, en este contenido, es que los escolares perciban que se determinan puntos en el lugar donde se unen dos rectas de las figuras planas y donde se unen tres o más en los cuerpos geométricos.

Por otra parte, debe considerarse que el trazado de rectas, por uno y dos puntos, constituye una condición previa para el tratamiento del concepto semirrecta y segmento.

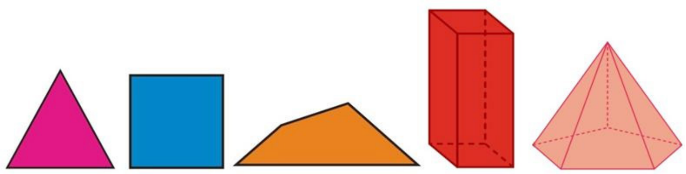
Al finalizar este contenido se deben introducir las nociones geométricas de paralelismo y perpendicularidad, partiendo de ejemplos de la vida, como las cuerdas de una guitarra, en el caso de las rectas paralelas y los bordes consecutivos de las paredes del aula, en el de las rectas perpendiculares.

En estos contenidos se insiste en que los escolares comprendan que todas las rectas que no se cortan son paralelas, mientras que algunas que se cortan son perpendiculares; esto último lo pueden comprobar colocando los lados cortos del cartabón para ver si coinciden con las rectas que se cortan. Además de lo anterior, los escolares deben dominar el procedimiento (algorítmico) para trazar rectas paralelas y perpendiculares, utilizando la regla y el cartabón o dos cartabones, que constituirá condición previa para el trazado de paralelogramos.

Para la profundización de este contenido pueden orientarse actividades como las que se exponen a continuación:

1. Traza dos puntos y denótelos.

2. Identifica la cantidad de puntos que más se destacan en cada caso:

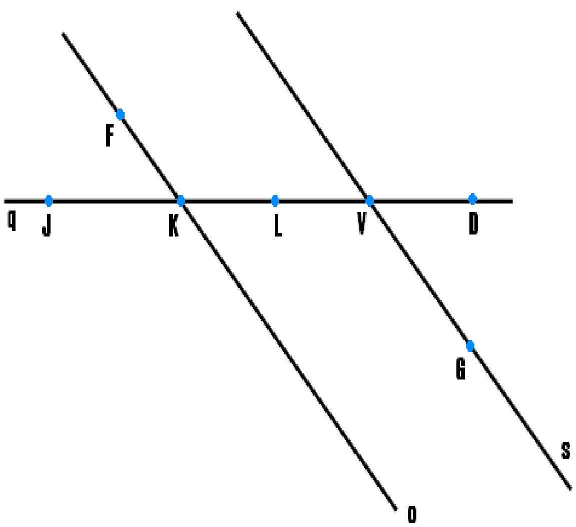


3. Traza una recta c y los puntos K, J y M de modo que:

a) Los puntos K y J no pertenezcan a la recta c.

b) Los puntos K y M pertenezcan a la misma recta.

4. Observa la siguiente figura y selecciona todas las proposiciones correctas:



……El punto K no está entre los puntos L y V.

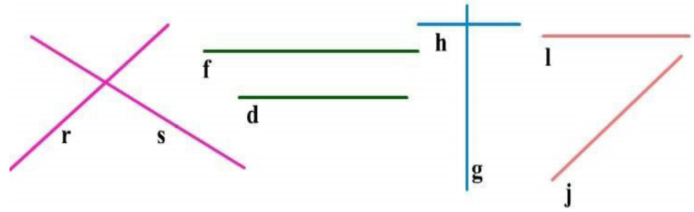
……El punto J está entre los puntos Q y K.

……La recta s no pasa por los puntos V y G.

……El punto V está entre los puntos L y D.

……Los puntos F y K están situados sobre la recta q.

5. Observa los siguientes pares de rectas y determina en cuáles de ellos se han representado rectas paralelas y perpendiculares:

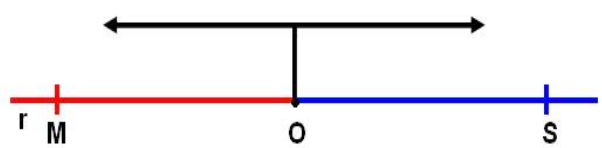


6. Observa la siguiente figura y determina la mayor cantidad de segmentos paralelos y perpendiculares:

En el tratamiento del concepto *semirrecta* se debe precisar que en una recta todo punto determina dos semirrectas, siendo ese punto el origen de las semirrectas. Resulta conveniente que se fije en los escolares la idea que las semirrectas no se pueden medir porque son ilimitadas a partir de su origen, y para que dos semirrectas sean opuestas deben cumplir con la condición de tener el mismo origen y estar determinadas sobre la misma recta.

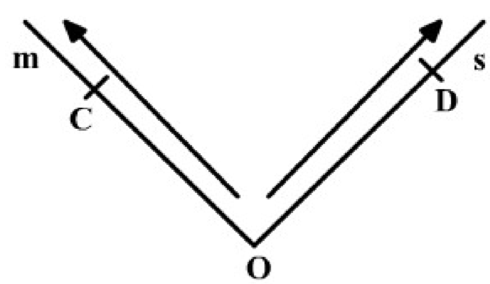
Ejemplo 1

En este caso las semirrectas OM y OS son semirrectas opuestas, pues tienen la misma dirección y sentidos opuestos; se encuentran determinadas sobre la misma recta y tienen el mismo origen.

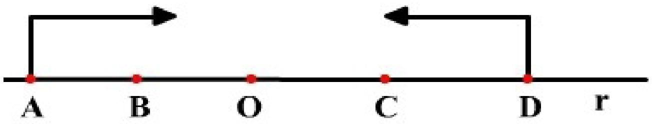


Ejemplo 2

En este ejemplo se han representado semirrectas (OC y OD) que tienen el mismo origen, pero no son semirrectas opuestas, porque no están determinadas sobre la misma recta.



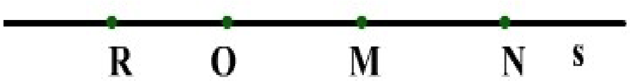
Ejemplo 3



En esta situación se debe destacar que las semirrectas AB y DC no son semirrectas opuestas, aunque tienen sentidos opuestos, porque están situadas sobre la misma recta, pero no tienen el mismo origen.

Pueden proponerse además ejercicios de reconocimiento de semirrectas en composiciones de puntos que se encuentren determinados sobre una misma recta, que tiendan a fijar la idea que todo punto en una recta determina dos semirrectas y que si se siguen determinando puntos en la recta siempre se obtiene el doble de semirrectas.

Ejemplo 4



En este caso encontramos: 2 . 4 = 8 semirrectas.

En la introducción del concepto de *segmento* se insiste en:

1. Se llama segmento la parte de una recta limitada por dos puntos, incluyendo a estos.

2. El segmento es una figura limitada por sus extremos.

3. Distinguir lo que es denotar y nombrar.

4. Un segmento está determinado por dos puntos diferentes, por eso se debe usar al denotarlos diferentes letras, nunca la misma.

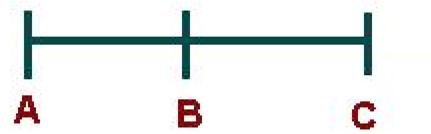
5. Se determinan segmentos en los lados y aristas de las figuras y cuerpos geométricos.

6. Los segmentos que superpuestos coinciden son iguales y tienen la misma longitud.

Es importante destacar que el conteo de segmentos en una composición constituye condición previa para el reconocimiento de figuras incluidas dentro de otras, del mismo tipo y de diferentes figuras.

Para fijar estas ideas pueden proponerse ejercicios como el que aparece a continuación:

1. Indica la cantidad de segmentos que se encuentran en esta figura:



Para reconocer la cantidad de segmentos que se encuentran en esta figura se puede analizar la figura como un todo y se descompone en cada una de sus partes.

De esta forma se obtienen tres segmentos: $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ y $\overline{BC}$.

Otra forma en que se puede reconocer la cantidad de segmentos que tiene esta figura es mediante la combinación de los puntos de la figura, de dos en dos, tal y como describe el principio de la relación intra e intermateria de la enseñanza de la geometría, siguiendo el siguiente procedimiento:

1. Se fija el primer punto como primer extremo del segmento y se combina este punto con cada uno de los extremos siguientes según el orden establecido.

2. Luego se fija el segundo punto y se repite la misma operación.

Obteniéndose de igual modo tres segmentos: $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ y $\overline{BC}$.

Para fijar este contenido se pueden realizar actividades tales como:

1. Analiza las siguientes proposiciones y diga si son verdaderas (V) o falsas (F). Argumenta para cada caso.

a)………Los segmentos y las semirrectas tienen origen y fin.

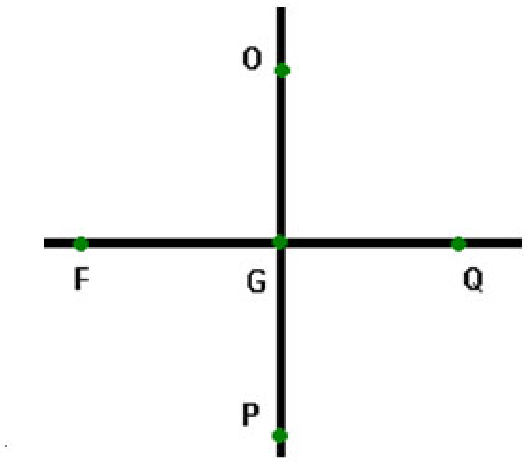
b)………Se llama semirrecta a cada una de las partes en que un punto divide una recta.

c)………La semirrecta, al igual que la recta, no se puede medir con la regla.

d)………En una recta todo punto determina una semirrecta.

e)………El punto que divide una recta en dos se llama vértice de las semirrectas.

2. Observa la siguiente figura y selecciona, marcando con una equis (X), la proposición correcta.

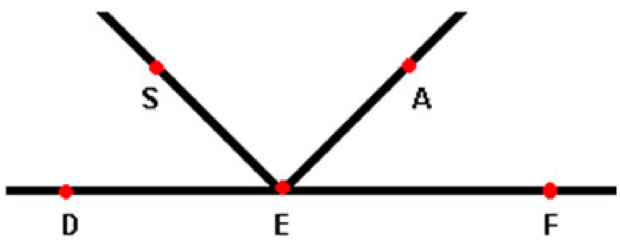


a)………La semirrecta GF y la semirrecta GQ no son opuestas.

b)………La semirrecta GO y la semirrecta GP son opuestas.

c)………La semirrecta GF y la semirrecta GO son opuestas.

3. Observa la siguiente figura y selecciona, marcando con una equis (X), las proposiciones correctas.

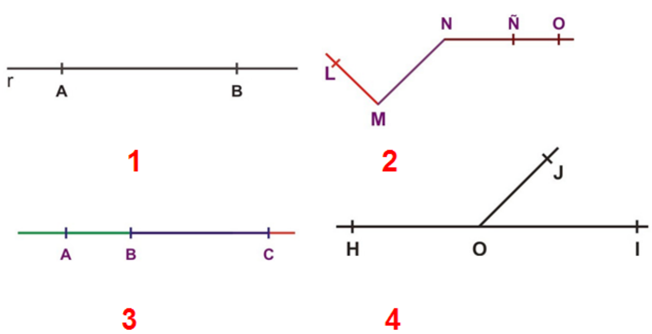


a)………La semirrecta ES y la semirrecta EA no son opuestas.

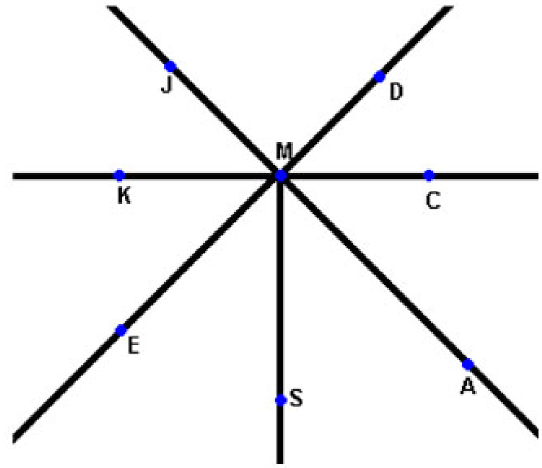
b)………La semirrecta DE y la semirrecta FE son opuestas.

c)………La semirrecta ED y la semirrecta EF son opuestas.

4. Observa la siguiente figura y diga la cantidad de semirrectas que se determinan, en cada caso.



5. Dada la siguiente figura, selecciona, marcando con una equis (X), la cantidad de pares de semirrectas que son opuestas.



a)………6 pares de semirrectas

b)………7 pares de semirrectas

c)………8 pares de semirrectas

Por su parte, en el concepto *plano* se deben tener presente todos los contenidos anteriores, recordándose que el plano junto al punto y la recta, constituye uno de los conceptos básicos de la geometría, pues cualquier objeto geométrico puede sintetizarse a partir de ellos.

Algunas nociones para introducir este concepto son las que a continuación se muestran:

1. Un campo de fútbol.

2. El piso de una casa.

3. La hoja de un libro.

4. La pared de una casa.

Del mismo modo se pueden desarrollar actividades experimentales, como plantea el principio de utilización de objetos concretos y otros medios de enseñanza, en las que los escolares reconozcan en modelos de cuerpos geométricos superficies planas e indiquen en ellos las caras que están en planos que se cortan (siempre tienen una arista en común) y las caras que no están en planos que se cortan, es decir las paralelas. En el caso de los cuerpos geométricos redondos se pueden identificar en el cono y el cilindro sus superficies planas, en sus bases; aclarándose en este último que solo sus bases están en planos paralelos. Estas mismas actividades pueden servir de base, también, para la apropiación del carácter ilimitado del plano.

El concepto *semiplano* puede trabajarse mediante actividades prácticas: trazando una recta en una hoja de papel y doblándola a partir de esa recta. De esta manera el plano representado por la hoja de papel queda dividido por la recta en dos regiones o semiplanos. A esa recta se le llama borde del semiplano. Es importante que el maestro llegue a destacar es que si dos puntos están en semiplanos opuestos el segmento determinado por ellos corta al borde, de lo contrario no lo corta; y que los puntos situados en el borde del semiplano pertenecen a ambos semiplanos.

Para fijar los contenidos de plano y semiplano los escolares pueden realizar actividades tales como:

1. Traza una recta s y los puntos L, M, R, N y D de modo que:

a) L y M estén en situados en el mismo semiplano.

b) R y N estén en situados en el borde del semiplano.

c) L y D estén situados en semiplanos opuestos.

2. Traza una recta r y segmentos a partir de los puntos B, L, M, N, R y S de modo que:

a) El segmento RS tenga sus extremos en el mismo semiplano.

b) El segmento BL corte el borde del semiplano.

c) El segmento MN no corte el borde del semiplano.

d) El segmento RS y el segmento MN no estén en el mismo semiplano.

Al culminar este contenido el maestro puede guiar a sus escolares a arribar a la conclusión que de la misma forma en que un punto en una recta determina dos semirrectas, siendo el punto el origen, una recta en un plano determina dos semiplanos y esta recta es su borde. También, tanto la semirrecta como el semiplano, están limitados por una parte (por el punto en la semirrecta y por el borde en el semiplano), pero ilimitados por otra y se prolongan tanto como se desee.

Al finalizar el contenido de plano y semiplano se pueden realizar las siguientes conclusiones:

1. El punto, la recta y el plano son ilimitados.

2. Tanto las rectas como los planos se cortan o son paralelos.

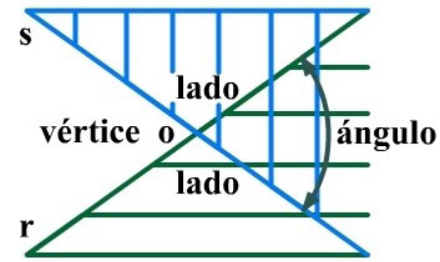
3. Las rectas se cortan en un punto; mientras que los planos se cortan en una recta.

4. ada punto en una recta determina dos semirrectas; las semirrectas obtenidas son opuestas.

5. Cada recta en un plano determina dos semiplanos; los semiplanos obtenidos son opuestos.

La introducción del concepto *ángulo*, al finalizar el ciclo, debe motivarse a partir de los contenidos de recta, semirrecta, plano y semiplano. Debe indicársele a los escolares que tracen, junto al docente, dos rectas que se cortan en un punto y destaquen en colores diferentes los dos semiplanos que ellas determinan, como se indica en la figura que aparece de manera seguida.

Ejemplo 5



Seguidamente se precisará que la parte o región del plano doblemente rayada, que es común a ambos semiplanos, donde se incluye el punto de intersección y las semirrectas que son los bordes, se llama ángulo.

En este momento deben ser analizados, también, los elementos de esta figura: (1) vértice, que es el punto de intersección de los bordes de los dos semiplanos; (2) lados, formados por las semirrectas que limitan la región doblemente rayada; y (3) puntos interiores, aquellos que son comunes a los dos semiplanos que no están en sus bordes.

Para fijar este concepto es conveniente que se realicen actividades experimentales en las cuales los escolares reconozcan ángulos en los polígonos conocidos y en el entorno. Posteriormente se debe introducir las formas de notación que se utilizará: (1) tres letras mayúsculas, con la letra del vértice en el medio; (2) un número, que por lo general se coloca en la región interior próximo al vértice; y (3) una sola letra mayúscula en el vértice.

Una vez introducido el concepto resulta necesario que los escolares se familiaricen con el semicírculo graduado y dominen el procedimiento para medir y trazar ángulos de diferentes amplitudes (desde 0^0 hasta 180^0). Luego de la presentación y utilización del instrumento los escolares deben arribar, además de las anteriores, a las siguientes conclusiones:

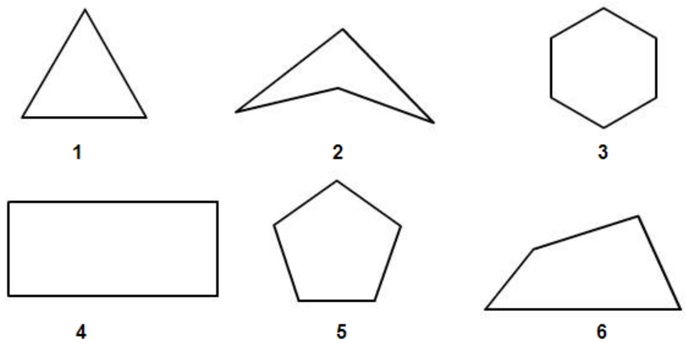
1. Los ángulos rectos miden 90° y sus lados coinciden con los lados cortos del cartabón, pues son perpendiculares.

2. Los ángulos llanos miden 180° y la regla puede colocarse sobre los dos a la vez, pues sus lados son semirrectas opuestas.

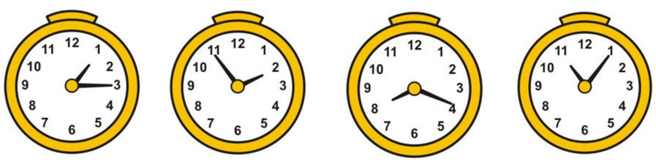
En la ejercitación de este contenido deben proponerse actividades, tanto de medición como de trazado; se debe relacionar, también, con el reloj y las fracciones, que constituyen una de las utilidades prácticas de este concepto.

Para el desarrollo de este contenido se pueden utilizar algunas actividades como las que siguen:

1. Observa las siguientes figuras geométricas y determina para cada caso la cantidad de ángulos.



2. Determina, para cada caso, la medida aproximada del ángulo que forman las manecillas.



3. ¿Qué hora marca el siguiente reloj si el horario indica el 2 y el minutero ha recorrido un ángulo de 90º, a partir de la hora en punto?

4. Traza dos ángulos de 40° y 115°. Denótalos.

5. ¿En cuál de las siguientes horas las manecillas del reloj formarán un ángulo recto? Marca con una equis (X) la respuesta correcta. Ten en cuenta el sentido en que giran las manecillas del reloj y parte siempre del horario hasta el minutero.

……3:30 p.m ……3:15 p.m

……3:00 p.m ……3: 20 p.m

6. ¿En cuál de las siguientes horas las manecillas del reloj formarán un ángulo llano? Marca con una equis (X) la respuesta correcta. Ten en cuenta el sentido en que giran las manecillas del reloj y parte siempre del horario hasta el minutero.

……9:00 p.m ……9:10 p.m

……9:15 p.m ……9:30 p.m

En la introducción del concepto *polígono* se parte del concepto línea poligonal y en los tipos de líneas poligonales: abierta y cerrada, donde la porción del plano limitada por una línea poligonal cerrada, incluyendo a esta, se llama polígono. Resulta importante que los escolares conozcan, desde los primeros grados, conozcan los elementos de los polígonos: vértices, lados (consecutivos y opuestos) y ángulos (este último en el cuarto grado); aunque el término polígono no se trabaje de primero a tercer grado. También su clasificación de acuerdo a la cantidad de lados.

El *triángulo* es uno de los polígonos que se aborda en el primer ciclo de la Educación Primaria. En los primeros grados se destaca que aquellos triángulos que coinciden al superponerse son iguales y que éste es el polígono de menor cantidad de lados. En los escolares se puede formar la idea que aunque los objetos no tienen forma de triángulo se pueden encontrar en las caras de muchos de ellos.

Dentro de los representantes del concepto polígono se encuentra además el *cuadrilátero*, al que es dedicado gran parte de este contenido. De forma intuitiva e indicando características formativas al presentársele a los escolares ejemplos de la misma clase y de otras clases, se pueden elaborar los conceptos: cuadrilátero, trapecio, paralelogramo, rectángulo, rombo y cuadrado.

La comparación entre triángulos y cuadriláteros les permitirá a los escolares reconocer las características comunes y las diferencias entre estas figuras. Ellos pueden reconocer que: tanto los triángulos como los cuadriláteros son polígonos. Sin embargo, se diferencian en cuanto a su cantidad de elementos.

Al tratar los diferentes cuadriláteros deben establecerse explícitamente las relaciones entre los diferentes conceptos, de esta manera al finalizar todo el contenido en el análisis de la clasificación de los cuadriláteros, los escolares deben llegar a las siguientes generalizaciones:

1. Todos los polígonos que tienen cuatro lados son cuadriláteros.

2. Los cuadriláteros pueden o no tener lados opuestos paralelos.

3. Los cuadriláteros que tiene al menos un par de lados opuestos paralelos son trapecios.

4. Los cuadriláteros que tienen sus lados opuestos paralelos se llaman paralelogramos.

5. Los paralelogramos también son trapecios.

6. Los paralelogramos que tienen sus lados consecutivos perpendiculares se llaman rectángulos.

7. Los paralelogramos que tienen sus lados iguales se llaman rombo.

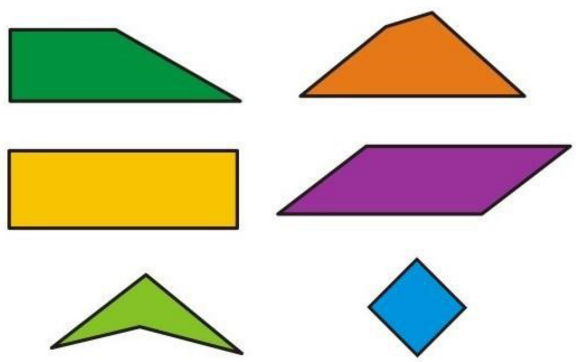
8. El rectángulo que tiene sus lados iguales se llama cuadrado.

9. El rombo que tiene sus lados consecutivos perpendiculares se llama cuadrado.

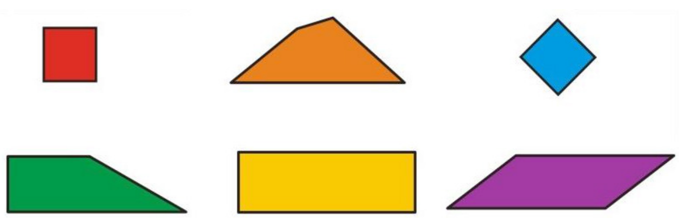
Estas generalizaciones quedan expresadas en el principio del pensamiento geométrico abstracto, pues obsérvese cómo en el tratamiento de estos conceptos se le otorga especial importancia en todo momento a la relación entre cada uno de ellos.

Esto lo pueden obtener como conclusión los propios escolares si realizan actividades como las siguientes:

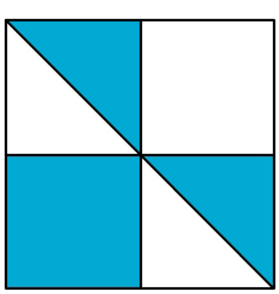
1. Analiza las siguientes figuras geométricas y determina si todos son cuadriláteros. Argumenta.



2. Observa los siguientes cuadriláteros y selecciona los que satisfacen la siguiente propiedad: "*Tiene sus lados opuestos paralelos".*



3. Compara la cantidad de triángulos y rectángulos y señala la respuesta correcta:

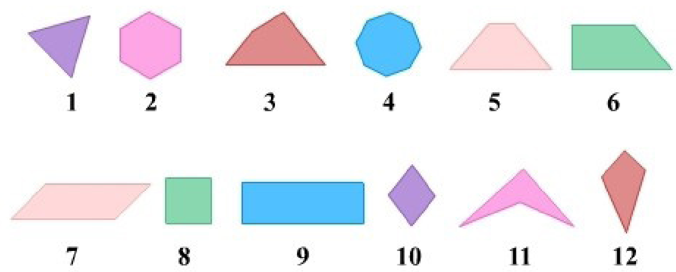


……Hay más triángulos que rectángulos

……Hay más rectángulos que triángulos.

……Hay igual cantidad de triángulos que de rectángulos.

4. Dadas las siguientes figuras geométricas reconoce:



a) Cuadriláteros....………………………………...

b) Rectángulos………………………………...........

c) Trapecios………………………………..................

d) Rombos………………………………....................

e) Paralelogramos……………………………….......

5. Analiza las siguientes proposiciones y diga si son verdaderas o falsas. Argumenta en cada caso.

a) Algunos cuadrados son rectángulos.

c) Todo rombo es un cuadrado.

Al introducir los conceptos de *circunferencia* y *círculo* se deben señalar los elementos de la circunferencia (centro, radio y diámetro), además de destacar la relación que existe entre la igualdad de los radios e igualdad de las respectivas circunferencias. De igual modo, que cuando los escolares comenzaron a trazar figuras con la plantilla y el resto de los instrumentos de dibujo, resulta muy importante que los escolares se familiaricen con el compás, sus partes y uso.

Aunque los conceptos de circunferencia y círculo están íntimamente ligados porque los elementos de uno corresponden al otro. El estudiante debe llegar a la conclusión que la figura geométrica curva formada por todos los puntos del plano que están situados a igual distancia de un punto interior, llamado centro se nombra circunferencia; mientras que la figura geométrica formada por todos los puntos interiores a una circunferencia, incluyendo a esta, se denomina círculo.

En el desarrollo de los contenidos de figuras geométricas no se debe olvidar que las construcciones geométricas tienen importantes funciones dentro de la clase de geometría, ya que el dominio de esta habilidad permite al escolar elaborar figuras y cuerpos geométricos como representantes de cualquier concepto, comprender sus propiedades y ampliar el vocabulario geométrico, al describir el procedimiento utilizado.

Los escolares en su aprendizaje geométrico deben reproducir figuras geométricas a partir de modelos dados, mediante diversos materiales (papel, cartón, plastilina, alambre, madera, puntillas, tijera, colores o tempera) e instrumentos de trazado.

Estas actividades además de relacionarse con el principio del carácter contextual de los contenidos geométricos, el de utilización de objetos concretos y otros medios de enseñanza, el de la relación intra e intermateria de la enseñanza de la geometría y el del pensamiento geométrico abstracto puede vincularse con el del apoyo continuo en los conocimientos históricos; solo bastaría que el docente encuentre en momento indicado y dé a conocer curiosidades históricas para motivar el aprendizaje en los escolares.

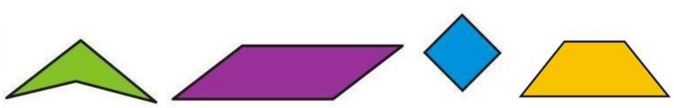
También pueden realizar actividades de construcciones geométricas mediante el uso de medios de enseñanzas como el tangram y el geoplano, de los cuales se brinda un procedimiento para su construcción, utilizando las nociones geométricas de igualdad y paralelismo.

De esta manera los escolares podrán representar polígonos con diferentes medios y procedimientos sobre la base de datos dados en forma oral; escrita o gráfica, partiendo del dominio de las propiedades geométricas.

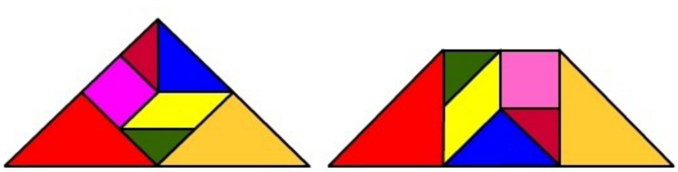
Algunos ejercicios que pueden ser utilizados para comprobar el logro de los objetivos, unidos a los que se encuentran en los libros de textos y cuadernos de trabajo, son los siguientes:

1. Traza en el papel cuadriculado la siguiente figura geométrica:

2. Representa en el geoplano los siguientes cuadriláteros:



3. Construye con el Tangram las siguientes figuras geométricas:



4. Construye con los instrumentos de trazado un paralelogramo ABCD.

5. Traza dos circunferencias de 2 y 3 cm de radio respectivamente. Denota su centro.

6. Recorta las siguientes figuras. Después con un solo corte, forma en cada caso:

a) Un cuadrilátero que no sea paralelogramo.

b) Un paralelogramo que no sea rectángulo.

3.2. Sugerencias metodológicas para el tratamiento de los movimientos del plano en el primer ciclo de la Educación Primaria

El tratamiento de los movimientos geométricos en el primer ciclo se inicia con la observación y percepción de elementos del mundo circundante, pues es a partir de la realidad, como expresa el principio del carácter contextual de los contenidos geométricos, que se realiza el proceso de abstracción y generalización de estos conocimientos.

En el tercer grado, la introducción de los movimientos geométricos: traslación, reflexión y rotación debe realizarse tomándose como referencia las acciones de trasladar, reflejar y doblar, realizadas en el entorno. Para tratarse la terminología anteriormente mencionada se sugiere solo mencionar que los objetos en el espacio y las figuras en el plano se trasladan, se reflejan o giran.

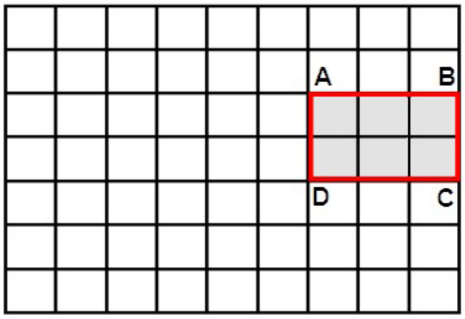
Para introducir el concepto *traslación* se sugiere presentar ejemplos de la vida cotidiana como: un carro a lo largo de una carretera recta; el abrir y cerrar de una puerta de corredera; y un niño cruzando la calle en línea recta para llegar a la escuela.

Por otro lado, se pueden realizar actividades de orientación espacial. Estas actividades espaciales propiciarán que los escolares comprendan que se pueden trasladar en cualquier sentido y dirección. Es necesario que puedan percibir, además, que los objetos luego de trasladarse no cambian ni su forma, ni su tamaño.

Para que ellos comprendan que lo mismo ocurre al trasladarse figuras geométricas sobre una superficie plana se puede apoyar el docente en el uso del papel cuadriculado o el geoplano, orientándolos que trasladen u observen la cantidad de cuadrículas o unidades, respectivamente, en que se han trasladado las figuras, como se muestra en los siguientes ejemplos:

Ejemplo 1

En el papel cuadriculado traslada el rectángulo ABCD, desde la posición en que está, seis cuadrículas hacia la izquierda:



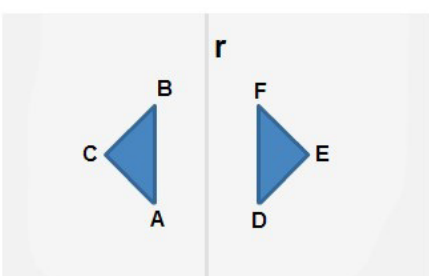
Si se utiliza para la introducción de este movimiento geométrico un ejemplo similar a este debe interiorizarse, por parte de los escolares, que cada punto de esa figura se mueve a una misma distancia. Deben conocer los escolares también que el lugar donde inicialmente estaba el rectángulo se llama figura original, mientras que el que ocupó después de trasladarse se llama figura imagen. Mediante este movimiento se le ha hecho corresponder a cada punto de la figura original un único punto en la figura imagen.

De manera similar a como se procedió con el concepto traslación debe introducirse el concepto *reflexión*. Algunos ejemplos de este movimiento en el entorno son: un niño mirándose en un espejo; la imagen de la luna sobre la superficie del agua en calma; y la proyección de una película en un cine.

A partir de la demostración de estos y otros ejemplos los escolares deben llegar a la conclusión que en todos los casos las propiedades de forma y tamaño permanecen. Sin embargo, el reflejo de la imagen queda invertido con respecto a la posición física del objeto.

Posteriormente se debe pasar a analizar una situación del plano. La vía más tradicional para introducir este movimiento es a partir de la utilización de una hoja de papel, doblada a la mitad, donde se dibuja en una de sus partes una figura con tempera y antes que se seque se unen ambas partes, presionándose fuertemente, como se ilustra en el ejemplo 2, aunque los triángulos no quedan con sus lados exactamente rectos:

Ejemplo 2



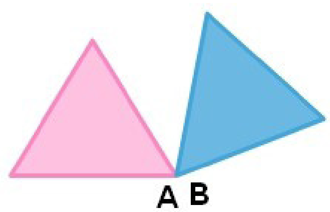
Resulta importante que los escolares adviertan que, al igual que en el movimiento anterior, se le hace corresponder a cada punto del triángulo ABC (figura inicial o de origen) un único punto en el triángulo DEF (figura final o imagen).

De forma análoga a como se introdujeron los dos conceptos anteriores debe procederse con la introducción del movimiento *rotación*. Deben indicarse algunos ejemplos de este movimiento en el medio como los siguientes: la estrella de un parque de diversiones; un trompo al bailar; y las manecillas de un reloj.

En todos estos casos debe mostrarse que todos los puntos de estos objetos giran a la misma distancia de su eje y que solo se pueden girar en dos direcciones: derecha o izquierda.

Para ejemplificar este movimiento en el plano debe presentarse una figura geométrica a la que se hace girar, con la mano, sobre uno de sus puntos. En este caso se ha hecho girar el triángulo ABC, a partir del punto B (que permanece fijo), hacia la derecha, al cual le corresponde, como imagen, luego del movimiento, el triángulo DEF.

Ejemplo 3



Luego de realizarse este movimiento los escolares deben percatarse que todos los puntos de esa figura giran a una misma distancia. Otra idea importante que se debe comprender es que en este movimiento permanece la forma y el tamaño de la figura. No obstante varía su orientación.

Una vez terminado el estudio de los movimientos geométricos los escolares deben llegar a las siguientes conclusiones:

1. Cuando se mueve una figura en el plano, se obtiene una figura igual a la original.

2. Mediante un movimiento le corresponde a cada punto de la figura original un único punto de la figura imagen.

3. Si dos figuras son iguales, es porque una se obtiene de otra mediante un movimiento.

Para profundizar en estos contenidos pueden plantearse ejercicios como los siguientes:

1. Analiza las siguientes situaciones y determina qué sucede en cada caso:

a) Un tren a través de una línea donde no hay curvas.

…..Gira. …..Se traslada. …..Se refleja.

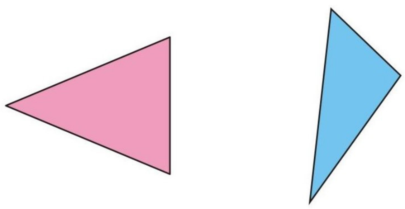
b) Un niño frente a la vidriera de una tienda.

…..Gira. …..Se traslada. …..Se refleja.

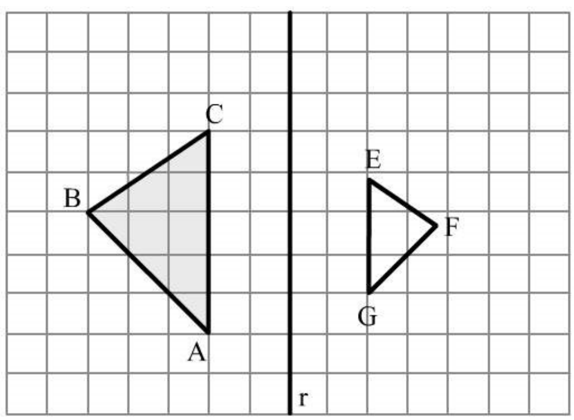
c) Las ruedas de un auto alrededor de sus ejes.

…..Gira. …..Se traslada. …..Se refleja.

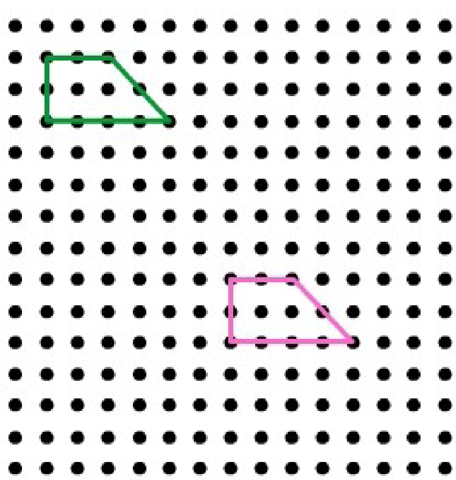
2. Observa los siguientes triángulos y diga si la siguiente proposición es verdadera o falsa: *"El triángulo azul no es imagen del otro triángulo por un movimiento".*



3. Analiza si el triángulo ABC es imagen del triángulo EFG por movimiento. Argumente.



4. Selecciona el procedimiento que puedes seguir para trasladar en el geoplano la figura rosada, desde donde está, hasta la posición que ocupa la verde. Marca con una equis (X) la respuesta correcta.

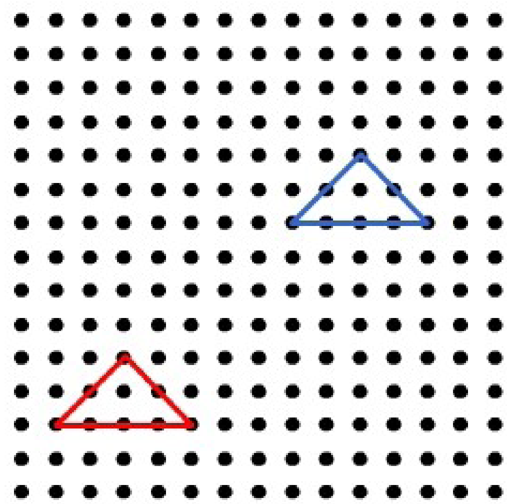


…..La muevo 7 unidades hacia arriba y 6 hacia la derecha.

…..La muevo 6 unidades hacia la izquierda y 7 hacia arriba.

…..La muevo 7 unidades hacia abajo y 6 hacia la derecha.

5. Selecciona el procedimiento que no debes seguir para trasladar en el geoplano el triángulo rojo, desde donde está, hasta la posición que ocupa el azul. Marca con una equis (X) la respuesta correcta.



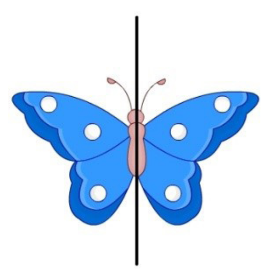
…..Lo muevo 7 unidades hacia la derecha y 6 hacia arriba.

…..Lo muevo 2 unidades hacia arriba, 7 la derecha y 4 hacia arriba.

…..Lo muevo 6 unidades hacia arriba y 6 hacia la derecha.

El tratamiento de los contenidos de figuras simétricas debe realizarse en el proceso de manera intuitiva. Se sugiere que previamente se introduzcan las figuras simétricas y posteriormente los pares de figuras simétricas con respecto a un eje. Inicialmente se les deben presentar, a los escolares, situaciones en las cuales deban trazar o doblar figuras para determinar si se dividen exactamente en dos partes iguales, como se muestra en el ejemplo que sigue.

Ejemplo 4



También el docente puede ejemplificar lo que sucede cuando se utiliza un espejo. En cada caso debe quedar claro que se obtienen figuras simétricas y que a esa recta imaginaria se le llama eje de simetría.

En el tratamiento de este contenido las potencialidades del entorno deben ser aprovechadas. Los escolares deben llegar a reconocer objetos que poseen simetrías en él como: muchas hojas de los árboles, algunos animales, el cuerpo humano, ciertas edificaciones y otros objetos. Estas actividades permitirán que se concluya que una figura es simétrica si se puede encontrar una línea imaginaria que la divida en dos partes iguales o si al colocar un espejo en la mitad de la figura, el reflejo y la mitad forman la figura completa.

Seguidamente se les debe ofrecer a los escolares la posibilidad que determinen cuáles de las figuras geométricas conocidas (triángulo, rectángulo, cuadrado, círculo y otros polígonos) son simétricas y los ejes de simetría que poseen, mediante actividades experimentales o por el dominio de las propiedades de estas figuras.

Estas actividades permitirán a los escolares obtener como conclusiones las siguientes:

1. Todos los polígonos no tienen ejes de simetría.

2. El triángulo que no tiene lados iguales no tiene ejes de simetría.

3. El triángulo que tiene dos lados iguales tiene un eje de simetría.

4. El trapecio que tiene sus lados no paralelos iguales tiene un eje de simetría.

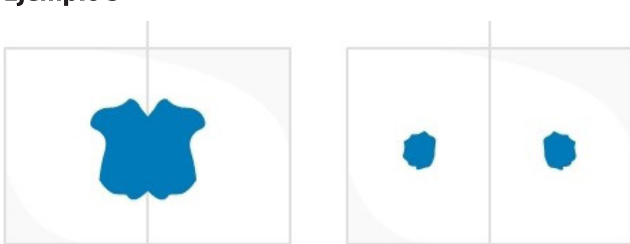
5. on tres los paralelogramos con ejes de simetría: el cuadrado, el rectángulo y el rombo.

6. Los polígonos que tienen sus lados iguales, tienen igual número de ejes de simetría que de lados.

7. El círculo tiene infinitos ejes de simetría, los cuales se corresponden con sus diámetros.

A fin de continuar profundizando en este contenido se le debe presentar a los escolares una situación en la que observen lo que sucede cuando se dobla una hoja de papel a la mitad, luego de dejar caer sobre ellas una gota de pintura, en el centro y en un lugar próximo a uno de sus extremos, como se muestra en el ejemplo siguiente.

Ejemplo 5



En ambos casos se obtienen un par de figuras iguales, pues al superponerse, a partir del eje de simetría, coinciden. Debe señalarse, en los dos ejemplos, que a cada punto de la figura original le corresponde un punto en la figura imagen y están situados sobre una recta perpendicular al eje de simetría y a igual distancia de él; no obstante, en el primer caso se observa que existen puntos que están en el eje y coinciden con él.

Para ejercitar este contenido se sugiere que se realicen actividades similares a las siguientes:

1. Menciona el nombre de objetos del entorno que tengan ejes de simetrías.

2. Observa el siguiente abecedario y clasifica cada letra en:

a) Simétricas.

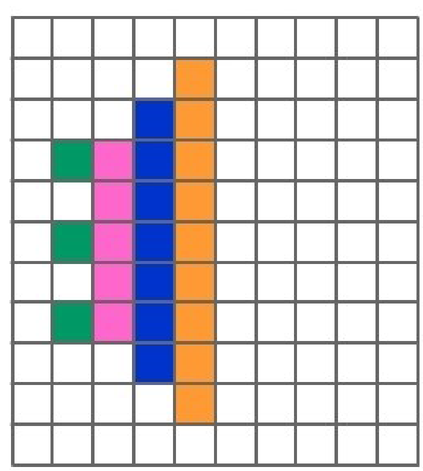
b) No simétricas.

c) Un solo un eje de simetría.

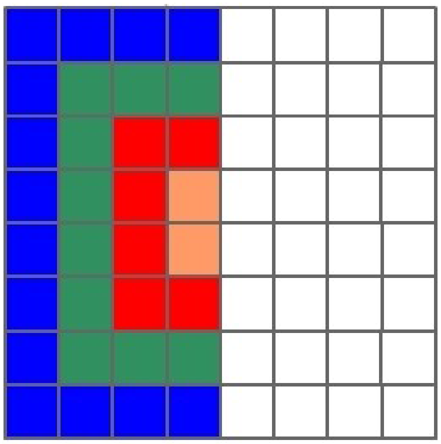
d) Más de un eje de simetría.

3. Completa cada una de las siguientes figuras de modo que se obtengan figuras simétricas.

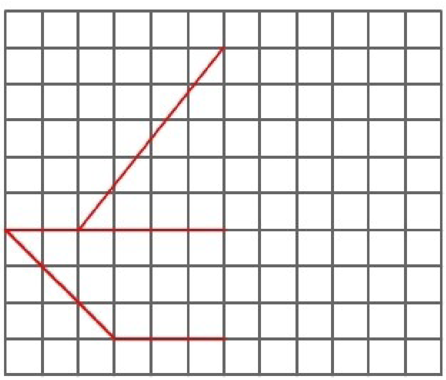
a)



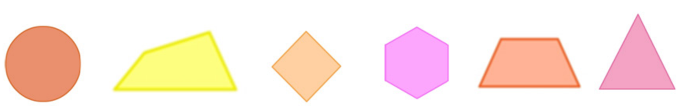
b)



c)



4. Dadas las siguientes figuras geométricas:



1 2 3 4 5 6

a) Determina cuáles son simétricas y la cantidad de ejes de simetría que poseen.

5. Construye dos cuadriláteros que tengan dos y cuatro ejes de simetría.

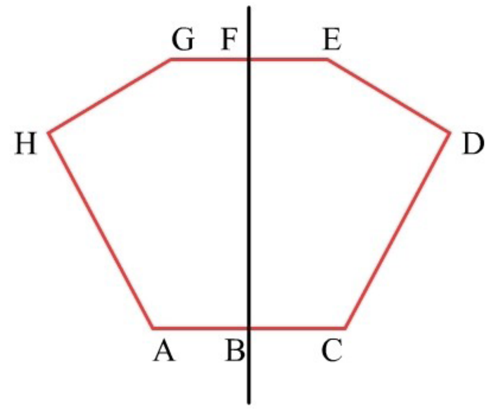
6. Analiza las siguientes proposiciones y diga si son verdaderas (V) o falsas (F). Argumenta para cada caso.

a)……..Todos los rectángulos tienen 4 ejes de simetría.

b)……..Algunos trapecios tienen más de un eje de simetría.

c)……..Hay figuras geométricas con infinitos ejes de simetría.

7. Observa la siguiente figura y establece relación de igualdad entre los lados y ángulos que se corresponden con respecto al eje de simetría FB.



3.3. Sugerencias metodológicas para el tratamiento de los conceptos de cuerpos geométricos en el primer ciclo de la Educación Primaria

A fin de continuar ampliando los conocimientos geométricos de los escolares se introducen los *cuerpos geométricos limitados por superficies planas* y los *cuerpos redondos*, mediante objetos concretos. Dentro de los cuerpos geométricos limitados por superficies planas se trabajan el ortoedro, el cubo, el prisma y la pirámide.

Generalmente los conceptos se forman a partir de dos vías: la inductiva y la deductiva. A continuación se presentan una serie de acciones para introducir los conceptos geométricos de *ortoedro* y *cubo*, a partir de la vía inductiva, en la etapa de ejecución:

1. Observación de propiedades geométricas en el medio: presentar diferentes objetos en una jaba (pelota, caja de zapatos, dado de jugar parchís, libro, bolígrafo y carretel de hilo) e indicar a los escolares que coloquen encima de la mesa los objetos que cumplan con la siguiente propiedad: Están limitados solamente por rectángulos.

2. Realización de generalizaciones empíricas: los escolares, bajo la orientación de los docentes, llegan a la conclusión que los objetos que están limitados solamente por rectángulos, tienen forma de ortoedro. Se insiste en que desde esta etapa se le dé a conocer a los escolares que los objetos limitados solamente por cuadrados también comparten estas características.

3. Realización de generalizaciones teóricas: esta acción guarda relación con la anterior, pues una vez que los escolares identifiquen en los objetos las características esenciales comunes (invariables), se elabora el concepto ortoedro por parte del docente, con ayuda de los escolares: El ortoedro es un cuerpo geométrico limitado por seis caras que son rectángulos, formando parte el cubo de la extensión del concepto. Previamente los escolares deben conocer que las caras en los cuerpos geométricos son las figuras geométricas que los limitan.

4. Determinación de otras propiedades del concepto: mediante actividades experimentales realizadas por los escolares con ayuda de modelos geométricos, se conocen otras propiedades

del ortoedro y el cubo, como: cantidad de vértices, aristas y relación de posición de sus caras opuestas.

5. Búsqueda de nuevos objetos con esa forma geométrica en el entorno: luego que los escolares conozcan las características esenciales del ortoedro estarán en condiciones de buscar objetos en el medio que tienen forma de ortoedro y explicar el motivo por el cual presentan esa forma.

6. Dominio, sistematización y autovaloración de las habilidades geométricas: el maestro podrá indicar una serie de actividades que le sirvan para potenciar y evaluar el paso de sus escolares por cada uno de los niveles de desarrollo de habilidades geométricas, donde el escolar de acuerdo a sus características, sea capaz de relacionar los contenidos de ortoedro y cubo con otros que él ya posee y aplicarlo en la solución de situaciones cotidianas.

El dominio y sistematización de habilidades geométricas se puede lograr utilizando diferentes medios de enseñanza, que vayan desde objetos concretos hasta el software educativo. En esta acción es indispensable la retroalimentación de los escolares, ya que se le debe ofrecer a cada uno de ellos la posibilidad que autovaloren el nivel de desarrollo de las habilidades geométricas adquiridas.

De igual forma se sugiere introducir el concepto de *prisma* y donde se concluya su estudio con la generalización por parte de los escolares, que el ortoedro y el cubo son prismas porque tienen un par de caras opuestas paralelas e iguales, llamadas bases y sus otras son rectangulares. En todos los prismas se cumple que su cantidad de caras laterales coincide con el número de lados del polígono que forma sus bases.

Para fijar bien estas ideas se considera necesario que se orienten actividades de armar y desarmar desarrollos planos de estos cuerpos geométricos, con varillas y plastilina; que además de ser observados por los escolares desde diferentes posiciones, tengan en cuenta la relación entre estos conceptos.

Por otra parte, al abordarse el concepto *pirámide* y sus elementos puede llegarse a la siguiente conclusión: *"La cantidad de caras de la pirámide es igual al número de lados del polígono que constituye su base".*

Al finalizar el estudio de los cuerpos geométricos limitados por superficies planas los escolares deben ser capaces de establecer semejanzas y diferencias entre los prismas y las pirámides:

Semejanzas:

1. Son cuerpos geométricos limitados por superficies planas.

2. El número de lados del polígono que limita sus bases o base (en el caso de la pirámide) determina su cantidad de caras.

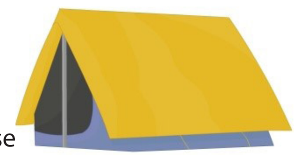
Diferencias:

1. El prisma tiene sus caras rectangulares y la pirámide triangulares.

2. El prisma tiene dos bases y la pirámide una sola.

Algunas actividades que pueden ser utilizadas en el tratamiento de estos contenidos son las siguientes:

1. La casa de campaña que se representa tiene igual forma que:



a)…… Un cubo

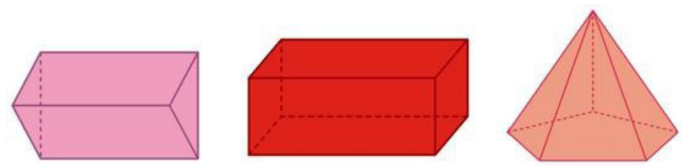
b)…… Un ortoedro

c)…… Un prisma de base triangular

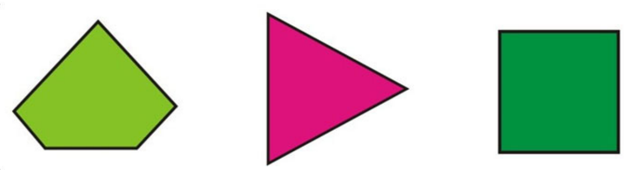
d)…… Una pirámide de base cuadrada.

2. Enlaza los siguientes cuerpos geométricos con la figura geométrica que se observa si se mira desde la derecha:

Cuerpos



Figuras planas

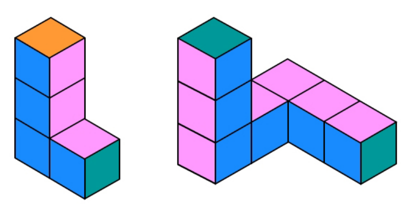


3. ¿Cuántos cubos hay que agregarle al cuerpo de la izquierda para obtener el cuerpo de la derecha? Marca con una equis (X) la respuesta correcta.

a)……3 cubos.

b)……7 cubos.

c)……4 cubos.



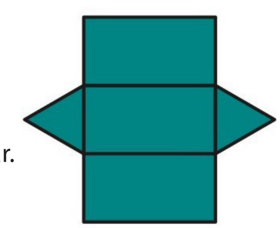
4. Selecciona qué cuerpo geométrico se forma al armar el siguiente desarrollo plano:

a)……Un prisma de base triangular.

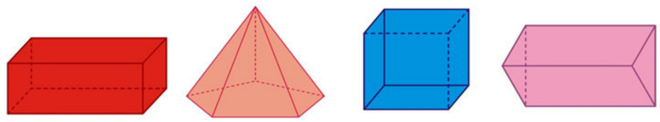
b)……Un cubo.

c)……Un prisma de base rectangular.

d)……Una pirámide.



5. Construye con varillas los siguientes cuerpos geométricos:



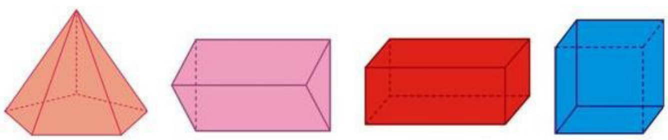
6. Construye con varillas un prisma que no sea el cubo.

7. Analiza las siguientes proposiciones y diga si son verdaderas o falsas. Argumenta.

a) Algunos ortoedros son prismas.

b) Todas las pirámides tienen base triangular.

8. Observa los siguientes cuerpos geométricos y diga en qué se asemejan y diferencian:



9. Analiza las siguientes interrogantes y dale respuesta a cada una de ellas, comentándola con tus compañeros.

a) ¿Por qué los tejados de muchas de las casas tienen forma de prisma triangular?

b) ¿Por qué las cajas tienen forma de ortoedro?

Dentro de los *cuerpos geométricos redondos* se abordan el cilindro, el cono y la esfera. Resulta conveniente que se utilice como variante para la introducción de estos conceptos geométricos que se parta del reconocimiento de objetos en el entorno con esas formas geométricas, además de identificar sus elementos y propiedades, mediante actividades prácticas.

Al impartirse el *cilindro* es importante que se destaque que está limitado por dos superficies planas que son círculos, consideradas sus bases, y por una superficie curva.

Luego que se presenten objetos del medio con forma de *cono l*os escolares, en modelos, deben conocer su diferencia con el cilindro: tiene una sola superficie plana que también es un círculo, considerado su base.

En el tratamiento de la *esfera* debe señalarse que, a diferencia de los prismas, las pirámides y el resto de los cuerpos redondos, ella no tiene bases, caras y está completamente formada por superficie curva. A esta conclusión debieron haber llegado los escolares cuando analizaron las superficies de los cuerpos al impartirse el contenido plano.

Para que los escolares no tiendan a confundir los conceptos de círculo y esfera resulta importante que los escolares comprendan la diferencia que existe entre ambos conceptos: *El círculo está contenido en un plano y la esfera no.* El análisis de las semejanzas y diferencias de estos cuerpos les posibilitará a los escolares conocer la razón por la cual son cuerpos redondos. Pueden aprovecharse para impartir estos contenidos actividades de armar y desarmar desarrollos planos de estos cuerpos geométricos (cilindro y cono); que pueden ser observados desde diferentes posiciones.

Sugerencias de tipos de ejercicios que pueden ser utilizados para comprobar el logro de los objetivos:

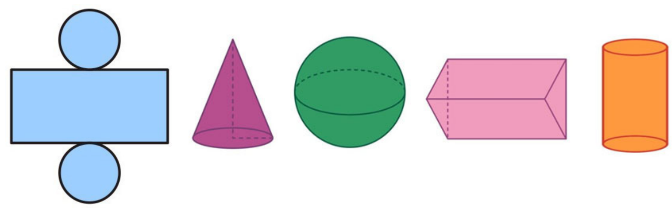
1. La parte superior de la farola que se representa tiene igual forma que:

a)…… Un cono

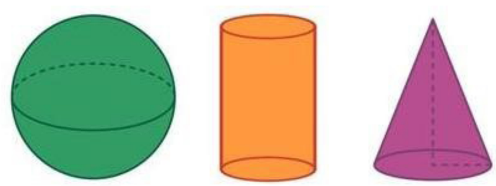
b)…… Una esfera

c)…… Un cilindro

2. Encierra en un círculo el cuerpo geométrico que se puede formar con estos elementos:



3. Observa los siguientes cuerpos geométricos y diga en qué se asemejan y diferencian:



4. Analiza las siguientes interrogantes y dale respuesta a cada una de ellas, comentándola con tus compañeros.

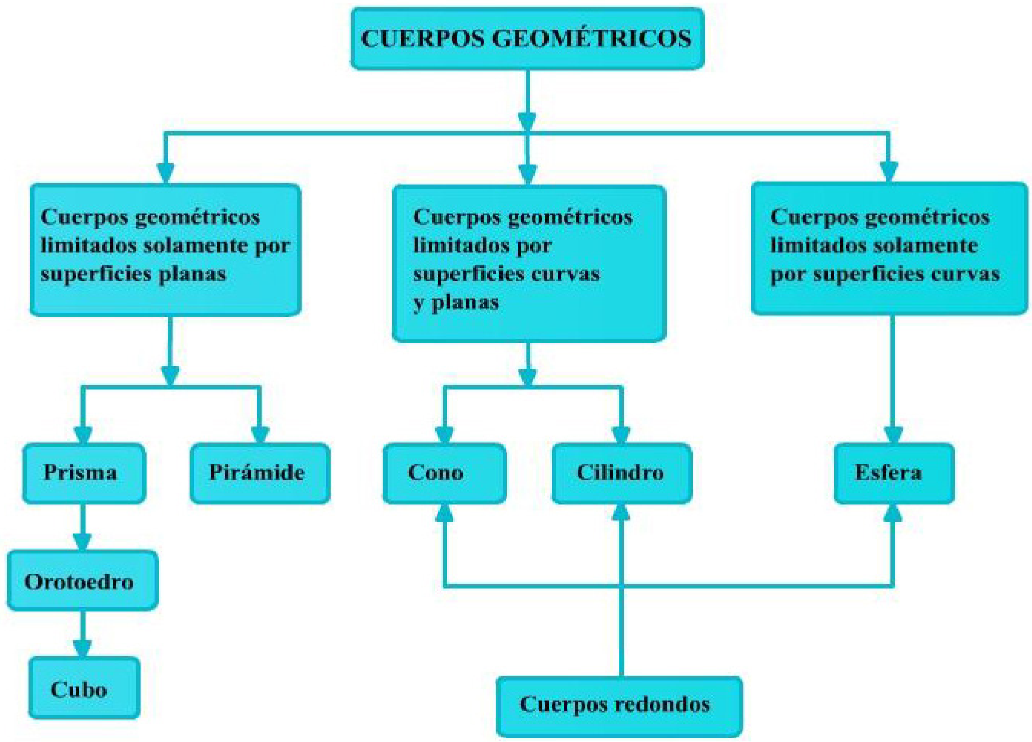
a) ¿Por qué las tuberías que transportan agua y otros líquidos tienen forma de cilindro y no de ortoedro?

b) ¿Por qué el embudo tiene forma de cono?

c) ¿Por qué muchos rollos de hilo tienen forma cilíndrica?

d) ¿Por qué las pelotas ruedan con facilidad?

A continuación se representa gráficamente todos los cuerpos geométricos abordados en el ciclo, así como la relación que existe entre ellos:



3.4. Sugerencias metodológicas para el tratamiento de la planimetría en el segundo ciclo de la Educación Primaria

En el tratamiento de los contenidos geométricos en el segundo ciclo de la Educación Primaria un aspecto muy importante lo constituye la consolidación de los conceptos fundamentales de la Geometría como: punto, recta, semirrecta, segmento y algunas relaciones en que intervienen esos conceptos. Se recomienda, ejercitar la identificación de estos elementos en el medio y en figura geométricas, insistiendo en la argumentación a partir de las características esenciales de cada uno, con el objetivo de continuar el desarrollo el pensamiento geométrico y para crear las condiciones previas para la introducción del concepto ángulo.

Para este recordatorio de plano y semiplano se puede utilizar una hoja de papel (o el plano de la mesa del maestro, o el pizarrón). Aquí debe destacarse que estas representaciones solo nos dan una idea, pues los planos no son limitados (en esos ejemplos concretos puede decirse que no están limitados por los bordes del papel, la mesa o el pizarrón), sino que hay que imaginar que se prolongan tanto como se desee.

Si utilizan el ejemplo del papel, surge naturalmente la idea de semiplano a partir del doblado de la hoja a lo largo de una recta de doblez. Esta forma es útil pues permite, además, recordar la noción de recta. En este caso debe destacarse que tampoco la recta es limitada, sino que se prolonga tanto como se quiera, y que cada vez que se traza una recta en el plano, se forman dos semiplanos.

Esto puede ilustrarse en el pizarrón, destacando cómo se denotan las rectas (por dos letras mayúsculas o por una sola minúscula), así como las relaciones que pueden establecerse entre ellas (destacando, en especial paralelismo y perpen¬dicularidad).

En el tratamiento del concepto ángulo deben trabajarse las siguientes habilidades:

1. Reconocer sus elementos: vértice, lados.

2. Denotar ángulos.

3. Nombrar ángulos.

4. Identificar ángulos en otras figuras.

5. Medir ángulos en grados sexagesimales.

6. Estimar la medida de ángulos en grados sexagesimales.

7. razar ángulos con una medida dada.

8. Clasificar ángulos según medida en grados sexagesimales.

El primer paso metodológico en el tratamiento del concepto lo constituye la elaboración del concepto. Para su elaboración se pueden seguir 2 vías, la inductiva o la deductiva.

En la vía inductiva se sugieren 2 variantes:

1. Se orienta a los escolares representar 2 semiplanos cuyos bordes se corten en un punto.

- Posteriormente que sombreen la parte común a ambos, incluyendo los bordes.
- Se orienta a los escolares representar otros 2 semiplanos cuyos bordes se cortan en un punto.
- Se les pide que sombreen la unión de los 2, incluyendo los bordes.
- Finalmente se informa que, tanto la intersección (común) como la unión de los semiplano se llaman ángulos y se precisa la definición.

2. Se puede emplear un medio de enseñanza como se describe a continuación:

- Un pedazo de cartulina o cartón en el que se ha trazado una recta y se ha rayado en color uno de los dos semiplanos.
- Un pedazo de plástico o papel transparente en el que se ha hecho lo mismo, pero utilizando otro color.
- Se coloca uno sobre otro haciendo coincidir las rectas, y se coloca un alfiler en un punto de la recta que esté cerca del centro del papel.
- Se hace girar el plástico o papel transparente y así se va viendo claramente cómo surge el ángulo como intersección de dos semiplanos (región doblemente rayada) y el ángulo como unión.

Finalmente se precisa la definición de ángulo como la intersección o unión de 2 semiplanos cuyos bordes se cortan o intersecan y se destacan sus elementos:

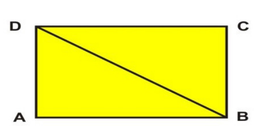
1. Vértice (punto de intersección de los bordes de los dos semiplanos).

2. Lados (semirrectas que limitan la región doblemente rayada).

En vía deductiva se presenta la definición y después se ejemplifica y se informan sus elementos.

El segundo paso metodológico lo constituye el desarrollo de habilidades en la identificación de ángulos en el medio y en las diferentes figuras geométricas y cuerpos estudiados, reconociendo sus diferentes elementos, formas de denotar y nombrar.

Aquí es importante insistir que la forma más utilizada es la de tres letras y que la letra del vértice se coloca en el centro. También resulta necesario destacar que en ocasiones no es conveniente utilizar la notación de una sola letra pues por ejemplo en la siguiente figura A es el vértice de 3 ángulos.



Los ángulos que se determinan son: ∢ABC, ∢ABD y ∢DBC, observa que los tres tienen el mismo
vértice.

Una vez introducido el concepto de ángulo y sus distintas formas de notación, se está en condiciones de pasar a medir la amplitud de un ángulo. Esto puede hacerse por analogía con el segmento:

Una vez introducido el concepto de ángulo y sus distintas formas de notación, se está en condiciones de pasar a medir la amplitud de un ángulo. Esto puede hacerse por analogía con el segmento:

1. Presentación del instrumento (lo ideal es que cada escolar tenga uno en sus manos) y explicación, con la participación activa de los escolares de su descripción, destacando:

2. En los segmentos es útil medir su largo o extensión (su longitud) y para ello se utiliza la regla graduada, en centímetros y milímetros.

3. Con la regla también se pueden trazar segmentos con una longitud dada.

4. Podrá también medirse la abertura o amplitud de un ángulo? ¿Con qué instrumento? ¿Con qué unidad de medida?

La solución que se le dará a este problema, es el semicírculo graduado. Los pasos metodológicos que se recomiendan para este trabajo son los siguientes:

1. Presentación del semicírculo graduado.

- Las partes en que está dividido. Introducir la denominación de grado, para cada una de las 180 partes en las que se divide el semicírculo. Se debe insistir en la notación que se utiliza e informar sobre la subdivisión en minutos y segundos, aunque esto último no es lo esencial.
- El centro, aclarando que hay que buscarlo sobre la línea donde están el 0^0 y el 180^0 y precisando que es el punto medio o central.

2. Explicación de la colocación del semicírculo para medir ángulos.

En este paso debe tenerse en cuenta 2 aspectos importantes:

- Cómo utilizar los semicírculos que no tienen doble graduación y los que sí.
- Cómo medir un ángulo intersección y cómo medir un ángulo unión.

Para medir cualquier ángulo se hace coincidir el vértice con el centro y uno de los lados con la semirrecta de origen en ese centro y que pasa por 0^0 ó con la que pasa por 180^0. El otro lado del ángulo debe quedar comprendido entre 0^0 y 180^0.

Si se trata de un ángulo intersección y un lado del ángulo se hace coincidir con 0^0 entonces la medida del ángulo es la que indica el semicírculo, pero si se hace coincidir un lado del ángulo con 180^0 entonces la medida del ángulo es 180^0 menos la que indica el semicírculo.

Si se trata de un ángulo intersección y un lado del ángulo se hace coincidir con $0^{0,}$ entonces la medida del ángulo es la que indica el semicírculo; pero si se hace coincidir un lado del ángulo con 180^0, entonces la medida del ángulo es 180^0 menos la que indica el semicírculo.

Si se trata de un ángulo unión y un lado del ángulo se hace coincidir con 0^0, entonces la medida del ángulo es 360^0 menos la que indica el semicírculo; pero si se trata de un ángulo intersección se hace coincidir un lado del ángulo con 180^0 entonces la medida del ángulo es 180^0 más la que indica el semicírculo.

Si el semicírculo tiene doble graduación, debe explicársele que siempre se empieza por la lectura de 0^0, ya sea el de la izquierda o el de la derecha, nunca por 180^0 y se lee la medida que corresponda siguiendo el sentido hacia donde se encuentra el otro lado. Si se trata de un ángulo intersección entonces la medida del ángulo es la que indica el semicírculo, pero si se trata de un ángulo intersección entonces la medida del ángulo es 180^0 más la medida que indica el semicírculo.

Para el desarrollo de habilidades en la medición de ángulos, se sugiere que mida ángulos cualesquiera, pero también de parejas de ángulos, ángulos de triángulos y de cuadriláteros, con el objetivo de preparar condiciones previas para el tratamiento de las propiedades respectivas que se estudiarán posteriormente.

La otra habilidad a trabajar es la de trazar ángulos con una medida dada. El desarrollo de esta habilidad tiene como condición previa la correspondiente a la de medición. Solo se tendrá que hacer mayor énfasis en el trazado de ángulos con una medida mayor que 180^0. Para ello es necesario explicar que se descompone la medida en 180^0 más otra medida que siempre es menor que 180^0. Por ejemplo: $300^0 = 180^0 + 120^0$. Primero se traza un ángulo llano (180^0) y a continuación se traza uno que mida 120^0.

Para la ejercitación tanto en la medición como el trazado, deben proponerse los ángulos siguiendo un orden creciente de dificultades:

1. Ángulos cuyas medidas sean menores que 180^0 (ángulos intersección).

- Ángulos cuya medidas sean múltiplos de 10 (30°, 40° y130°).
- Ángulos cuyas medidas sean múltiplos de 5 y no de 10 (35°, 45° y 115°).
- Ángulos que tengan cualquier amplitud (58°, 103° y 178°).
- Ángulos que estén en diferentes posiciones.
- Ángulos que estén insertados en figuras dadas.

2. Ángulos cuyas medidas sean menores de 180^0 (ángulos intersección).

3. Ángulos cuyas medidas sean mayores que 180^0 y menores que 360^0 (ángulos unión).

- Ángulos que estén en diferentes posiciones.

Otra habilidad importante a tener en cuenta cuando se tratan las diferentes magnitudes es la de estimación. Esta habilidad se puede trabajar en los ejercicios tanto de medición como en los de trazar.

Las habilidades anteriores sirven de base para la introducción de la clasificación de los ángulos según su medida. Aspecto importante para uno de los criterios de clasificación de los triángulos. En la clasificación de los ángulos los que miden 0^0, 90^0, 180^0 y 3600 sirven de límite para la clasificación.

Para el logro de la sistematización de las habilidades a desarrollar se pueden proponer ejercicios integradores tale como:

1. Traza un ángulo agudo y:

a) Señala sus elementos.

b) Denote con 3 letras mayúsculas.

c) Nómbralo.

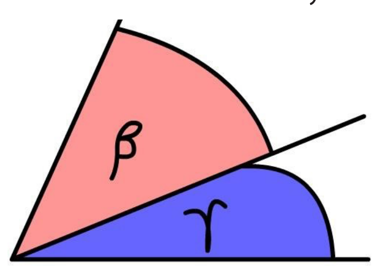
d) Estima su medida.

e) Determine su medida con el semicírculo.

Un aspecto de profundización del concepto ángulo es el relativo a relacionar la posición que guardan varios ángulos entre sí. En estas relaciones se destacan los siguientes conceptos a estudiar:

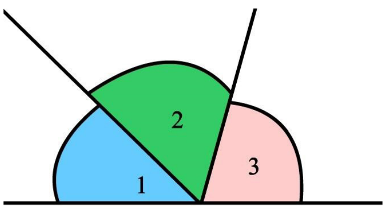
- Ángulos consecutivos.
- Ángulos opuestos por el vértice.
- Parejas de ángulos formados entre 2 rectas cortadas por una tercera.

Al abordar el concepto de ángulos consecutivos resulta importante resaltar que 2 ángulos son consecutivos si solamente tienen en común el vértice y un lado.

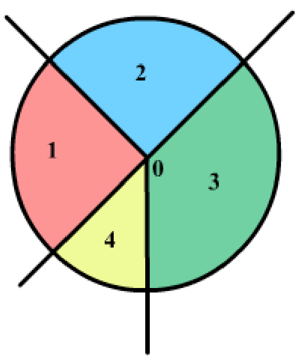


Resulta conveniente poner como contraejemplos pares de ángulos que no solamente tienen en común el vértice y un lado o que solamente tengan en común el vértice o que aparentemente tengan en común un lado.

Se debe extender el concepto de ángulos consecutivos a más de 2 ángulos con la idea de que "uno a continuación de otro", es decir son consecutivos 2 a 2. Entre los ejemplos de más de 2 ángulos consecutivos se deben destacar los ángulos consecutivos a un lado de una recta y los consecutivos alrededor de un punto.



Ángulos consecutivos a un lado de una recta



Ángulos consecutivos alrededor de un punto

Los docentes deben lograr que los escolares reconozcan que:

$\measuredangle 1 + \measuredangle 2 + \measuredangle 3 + \measuredangle 4 = 360^0$ y concluir que en general se cumple:

"Los ángulos consecutivos alrededor de un punto forman un ángulo completo y suman 360^0".

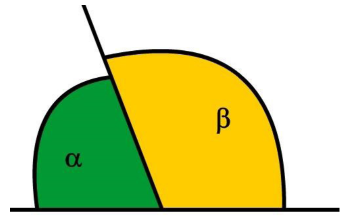
En el caso de los ángulos consecutivos a un lado de una recta se debe reconocer que:

$\measuredangle 1 + \measuredangle 2 + \measuredangle 3 = 180^0$ y partiendo de varios ejemplos concluir que en general se cumple:

"Los ángulos consecutivos a un lado de una recta forman un ángulo llano y suman 180^0".

Entre los ejemplos de ángulos consecutivos a un lado de una recta deben aparecer algunos con solamente dos ángulos, aprovechándose la oportunidad para introducir el concepto de ángulos adyacentes:

"Dos ángulos consecutivos a un lado de una recta se llaman ángulos adyacentes".



A modo de ampliación para los docentes se considera profundizar en la estructura de las definiciones. Existen diferentes tipos de definiciones, la definición de ángulos adyacentes es una definición existencial, específicamente llamada por algunos autores real u objetiva, este tipo de definición existencial tiene la estructura siguiente:

Concepto por definir = Concepto superior (genérico) + Características invariantes

El concepto por definir se conoce por definiendum y lo que lo define por definiens. En la definición anterior, ángulos adyacentes es el definiendum (concepto por definir), dos ángulos consecutivos es el concepto genérico y a un lado de una recta, la característica tipo. Es importante destacar que un mismo concepto se puede definir mediante diferentes expresiones, es decir, a lo que se define, conocido por definiendum, se le puede asociar un conjunto de diferentes términos y relaciones, nombrado definiens.

Por ejemplo, el concepto de ángulos adyacentes se puede definir también de la forma siguiente:

1. *Dos ángulos consecutivos cuya unión es un ángulo llano se denominan ángulos adyacentes.*

2. *Dos ángulos que tienen solamente un lado común y cuya unión es un ángulo llano se denominan ángulos adyacentes.*

En la expresión 1 se mantiene el concepto superior o genérico "ángulos consecutivos" y se sustituye expresión de la característica por otra equivalente. En el caso de la 2, se sustituye el concepto genérico por su respectivo definiens y se mantiene la expresión de la característica invariante. Las 3 definiciones son equivalentes pues les corresponden los mismos representantes. Es importante tener estos aspectos teóricos sobre definiciones para guiar de modo más acertada tanto su comprensión, así para contribuir al rigor del lenguaje matemático por parte de los escolares.

Después de elaborar el concepto de ángulos adyacentes se debe llevar a los escolares a reconocer que:

"Las amplitudes de los ángulos adyacentes suman 180^0".

La proposición anterior es una verdad matemática que puede ser demostrada a partir de los conceptos anteriores, por tanto constituye un teorema. Es conveniente expresar los teoremas en forma de implicación, o sea de la forma "Si p entonces q", siendo p la premisa o condición suficiente para q y q la tesis o condición necesaria para p. En este caso queda: "*Si dos ángulos son adyacentes entonces sus amplitudes suman 180^0*". Por tanto, que 2 ángulos sean adyacentes es la premisa o condición suficiente para que sus amplitudes sumen 180^0 y que sus amplitudes sumen 180^0 es una condición necesaria para que 2 ángulos sean adyacentes.

La argumentación (demostración) de la propiedad de los ángulos adyacentes debe hacerse de conjunto con los escolares de modo que se indique lo esencial:

1. Si son adyacentes son consecutivos a un lado de una recta (por definición).

2. Si son consecutivos a un lado de una recta suman 180^0 (por propiedad de los ángulos consecutivos a un lado de una recta).

En el análisis anterior es necesario destacar:

1. La propiedad de los ángulos adyacentes parece muy evidente, pero para su argumentación se parte de las premisas y con el empleo de una definición y una propiedad anterior se llega a la tesis.

2. En Matemática pueden encontrarse muchas afirmaciones como la propiedad de los ángulos adyacentes, cuya veracidad es necesario establecer a partir de definiciones y otras propiedades ya conocidas y que este proceso de argumentación se le llama demostrar.

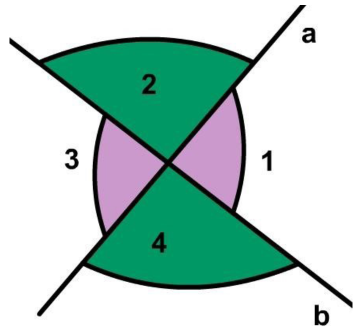
3. Tales afirmaciones o proposiciones verdaderas se denominan teoremas y que en ellos se da algo como información, la premisa o hipótesis, y lo que se busca, que es la tesis.

Los docentes deben hacer que los escolares comprendan que no siempre que las amplitudes de 2 ángulos suman 180^0, estos son adyacentes. Partiendo del análisis anterior se debe someter a los escolares a determinar el valor de verdad de la siguiente proposición (recíproco del teorema de los ángulos adyacentes): "*Si las amplitudes de 2 ángulos adyacentes suman 180^0 estos son adyacentes*". Con un contraejemplo se podrá afirmar que es falsa. Debe hacerse notar que el teorema de un teorema se forma intercambiando la premisa con la tesis.

También es bueno que los docentes conozcan cómo formar el contrarrecíproco de un teorema (la premisa es la negación de la tesis del teorema original y su tesis la negación de la premisa del original), así como que el contrarrecíproco de un teorema siempre es verdadero. En el caso del teorema de los ángulos adyacentes, sin necesidad de mencionarles a los escolares el término contrarrecíproco, se le puede preguntar que analicen la veracidad de la siguiente proposición: "*Si 2 ángulos no suman 180^0 entonces no son adyacentes*".

Aunque no se pretende que los escolares hagan un estudio de aspectos lógicos, sí es conveniente que los docentes muevan el pensamiento lógicos de ellos y con este análisis del recíproco y contrarrecíproco se contribuye a este fin. Pero para propiciar este fin los docentes sí deben conocer elementos de la lógica.

Después de abordar los ángulos consecutivos se pasa a dar tratamiento a otro par de ángulos, pero solamente tienen en común el vértice. Los docentes pueden presentar varios pares de ángulos con solamente el vértice común entre los que tienen que parecer al menos 2 pares, que sus lados sean respectivamente semirrectas opuestas, o sea que formen 2 rectas.



El concepto de ángulos opuestos por el vértice puede definirse de la forma siguiente: *"Los ángulos que se forman al cortarse dos rectas se llaman opuestos por el vértice".* Esta definición de ángulos opuestos por el vértice es genética, pues es ella se expresa cómo se obtienen ángulos opuestos por el vértice.

Debe hacer notar que al trazar 2 rectas que se cortan en un punto se forman 2 pares de ángulos opuestos por el vértice:

$\measuredangle 1$ y $\measuredangle 3$; $\measuredangle 2$ y $\measuredangle 4$.

Además, se puede aprovechar la representación de los ángulos opuestos por el vértice para reconocer que también se forman ángulos adyacentes preguntando: ¿Identifican otras parejas de ángulos? ¿Cuántas parejas de ángulos adyacentes se forman?

Para obtener el teorema de los ángulos opuestos por el vértice se puede proceder de varias vías, una de ellas consiste en orientar medir los ángulos y observar los resultados. Una segunda vía consiste en darle la medida de unos de 4 ángulos para hallara las amplitudes de los demás, aplicando la propiedad de los ángulos adyacentes. Por ejemplo:

si $\measuredangle 1 = 78^0$, calcular las amplitudes de los ángulos 2, 3 y 4.

$\measuredangle 1 + \measuredangle 2 = 180^0$ por ser ángulos adyacentes.

$78^0 + \measuredangle 2 = 1800$ sustituyendo.

$\measuredangle 2 = 180^0 - 78^0$.

$\measuredangle 2 = 102^0$.

De forma análoga se obtiene que $\measuredangle 3 = 78^0$ y $\measuredangle 4 = 102^0$.

Por cualquiera de las 2 vías los escolares podrán concluir que: "*Las amplitudes de los ángulos opuestos por el vértice son iguales o simplemente los ángulos opuestos por el vértice son iguales*".

Resulta conveniente analizar con los escolares los siguientes aspectos:

1. Forma implicativa del teorema, destacando la premisa y la tesis.

2. Argumentación (demostración) del teorema.

3. Formación del reciproco y del contrarrecíproco y determinación de su veracidad respectivamente de ambos.

La segunda vía de la búsqueda del teorema permite la comprensión de la argumentación.

Como $\angle 1$ y $\angle 2$ son adyacentes por ser consecutivos a un lado de la recta.

$\angle 1 + \angle 2 = 180^0$ por la propiedad (teorema) de los ángulos adyacentes.

$\angle 3 + \angle 2 = 180^0$ por la propiedad (teorema) de los ángulos adyacentes.

$\angle 1 + \angle 2 = \angle 3 + \angle 2$ porque ambas suma son iguales (180^0).

Luego $\angle 1 = \angle 3$ porque ambas sumas tienen como sumando $\angle 2$.

Es importante analizar que existe otra vía de obtención del teorema por movimientos y que también garantiza su veracidad. Para ello se puede utilizar un material auxiliar (cartulina y papel trasparente superpuesto) haciendo una simetría central con centro en el vértice del ángulo. En este movimiento el vértice es un punto fijo y las semirrectas (lados) de los ángulos se transforman en semirrectas opuestas respectivamente, por tanto los ángulos son iguales.

Al concluir la introducción de las parejas de ángulos adyacentes y opuestos por el vértice es conveniente que los escolares establezcan semejanzas y diferencias entre estas parejas, destacando que en ambos casos los ángulos tienen el vértice común y que al menos un lado de un ángulo es la semirrecta de un lado del otro ángulo en cada pareja. En cuanto a las amplitudes, los opuestos por el vértice siempre son iguales y los adyacentes siempre suman 180^0, y solo son iguales cuando se trata de 2 rectos.

Al iniciar el tratamiento de las parejas de ángulos formados entre 2 rectas cortadas por una tercera, es importante destacar que ahora se estudiarán parejas de ángulos que no tienen el vértice común y es necesario como condición previa que los escolares conozcan las distintas regiones que se forman al trazar la 3 rectas:

1. La región comprendida entre las dos rectas se llama interna y la comprendida fuera de ellas se llama externa.

2. La tercera recta que corta a las otras 2 se llama secante y divide al plano en dos semiplanos, uno a un lado de ella y otro al otro lado.

Una actividad que resulta muy útil para ejercitar a los escolares en las características de los ángulos según las regiones mencionas consiste en denotar los 8 ángulos que se forman dadas 2 rectas cualesquiera cortadas por una secante y formular preguntas tales como:

1. ¿Cuáles son los ángulos que están en la región externa y cuales en la interna?

2. ¿Cuáles son los ángulos que están en un mismo semiplano con respecto a la secante?

3. ¿Cuáles son las parejas de ángulos que están en regiones diferentes y cuáles en la misma región?

4. ¿Cuáles son las parejas de ángulos que están en un mismo semiplano y cuáles en semiplanos diferentes con respecto a la secante?

A continuación se pide a los escolares que seleccionen las parejas de ángulos que están en las siguientes combinaciones de posiciones:

1. En regiones diferentes y a un mismo lado de la secante.

2. En las mismas regiones y a diferentes lados de la secante.

3. En las mismas regiones y a un mismo lado de la secante.

De esta forma se introducen los conceptos de ángulos correspondientes, ángulos alternos y ángulos conjugados respectivamente. Un aspecto muy importante en la elaboración de estos conceptos consiste en que las no rectas cortadas por la secante no siempre deben ser paralelas, pues esta condición no es esencial para estos conceptos.

Para la fijación de estos conceptos se recomienda hacer ejercicios de identificación de las parejas estudiadas, incluyendo los ángulos adyacentes y los ángulos opuestos por el vértice.

Una vez asimilados estos conceptos, se pasa al punto fundamental del tratamiento de estas parejas que lo constituye el estudio de los teoremas de cada una cuando las rectas cortadas son paralelas, esta sí es una premisa esencial para el cumplimiento de las propiedades expresadas como teoremas.

Para la búsqueda de los teoremas pueden utilizarse varias vías:

1. La medición con un semicírculo graduado.

2. Los movimientos con el material concreto. (Para los correspondientes mediante una traslación y los alternos con una simetría central) La propiedad de los ángulos conjugados se obtiene partiendo de las propiedades de las parejas anteriores, nunca a partir de un movimiento, pues no son iguales.

También, después de conocer la propiedad, por ejemplo los ángulos correspondientes se puede mediante un ejercicio, conociendo la amplitud de uno de los ángulos, hallar la amplitud de los restantes ángulos aplicando la propiedad de los ángulos correspondientes, los adyacentes y los opuestos por el vértice. Finalmente los escolares observarán que los ángulos alternos tienen la misma amplitud y que los conjugados suman 180^0. Se deben seleccionar formulaciones muy sencillas para los 3 teoremas, de modo que se facilite la formación de los recíprocos y contrarrecíprocos sin dificultad. Por ejemplo:

Teorema:

"Los ángulos correspondientes formados entre rectas paralelas son iguales".

Recíproco:

"Los ángulos correspondientes iguales están formados entre rectas paralelas".

Contrarrecíproco:

"Los ángulos correspondientes que no son iguales no están formados entre rectas paralelas".

Esta formación de recíprocos y contrarrecíprocos se hace más comprensible a partir de escribir el teorema en forma implicativa y destacando la premisa y la tesis. En estos teoremas hay que destacar que hay dos condiciones, la primera que se trata de una pareja de ángulos determinada y que están formados entre rectas paralelas y para la formación del recíproco se mantiene la condición de la pareja de que se trata.

La argumentación (demostración) de los teoremas puede quedar garantizada desde su obtención, en dependencia de la vía utilizada. El tratamiento de la argumentación debe realizarse con mucha maestría, de modo que los escolares comprendan, no se está aceptando la veracidad de ellos por una simple medición, sino que se están fundamentando a partir de otros conocimientos adquiridos anteriormente.

Otro aspecto esencial en el tratamiento de estas parejas ángulos es la generalización con respecto a 2 ángulos cualesquiera formados entre 2 rectas paralelas cortadas por una secante:

1. Si se clasifican de la misma forma (ambos rectos 0 agudos u obtusos) entonces son iguales.

2. Si se clasifican en agudo uno y el otro en obtuso entonces suman 180^0.

Para la fijación de los teoremas se deben plantear ejercicios para calcular amplitudes de ángulos que vayan vinculando, en diferentes situaciones, todos los pares de ángulos.

El concepto *polígono* se ha trabajo desde grados anteriores luego se puede ver como un repaso. Lo fundamental que deben lograr los docentes es que los escolares comprendan el concepto polígono y activen sus conocimientos acerca de los triángulos y cuadriláteros conocidos, de modo que puedan utilizarlos a lo largo de todo el curso de geometría. Particularmente, en el caso de triángulo se hará una profundización en cuanto a sus elementos y propiedades.

La motivación del concepto polígono, y a la vez su elaboración, pueden hacerse de una manera activa indicando a los escolares que tracen dos (tres, cuatro, cinco) segmentos consecutivos de modo que cada dos solo tengan un extremo común (y no estén en una misma recta). A partir de lo que dibujen puede continuarse la actividad precisando que han trazado líneas poligonales que pueden ser abiertas o cerradas.

Si ningún estudiante dibuja alguna cerrada, puede darse algún impulso indicando que en el trazado anterior, o en un nuevo trazado, la línea poligonal trazada debe tener común un extremo del primer segmento trazado con uno del último. Para concluir este trabajo se precisa la definición de polígono y sus elementos:

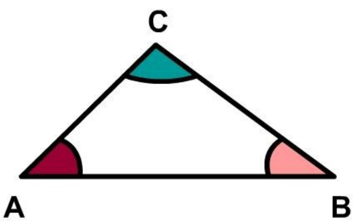
"La porción del plano limitada por una línea poligonal cerrada, incluyendo a esta, se llama polígono".

Elementos: lados vértices, ángulos y diagonales.

Teniendo en cuenta la definición anterior de polígono, la representación de cada polígono debe ser coloreando también su interior, pues su interior también forma parte de él. Independientemente de la aclaración anterior, en ocasiones con el objetivos de minimizar la complicación de una figura, solo se representa su contorno (poligonal cerrada). En cualquiera de las variantes que los docentes utilicen es muy importante que los escolares reconozcan los polígonos ya conocidos por ellos (triángulos y cuadriláteros) lo que debe ser aprovechado para discutir las clases de estos polígonos, ya conocidos y sus propiedades más características.

Dentro de los representantes conocidos está el triángulo. Esto puede ser utilizado para reconocer el triángulo como un polígono de tres lados y destacar sus elementos. Es importante insistir en los lados, nombrarlos, así como los ángulos interiores y proponer a los escolares ejercicios de trazado de triángulos para que ellos mismos los denoten y nombren sus vértices, sus lados y sus ángulos.

Los triángulos tienen tres lados, tres vértices y tres ángulos.

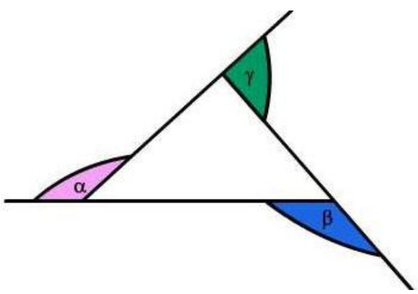


En este triángulo los vértices son los puntos A, B y C; los lados AB, BC y AC y ángulos ∢ ABC, ∢ ACB y ∢ BAC.

Se hace necesario introducir la relación "… se opone a…" entre lados y ángulos, así como el concepto de ángulo exterior:

El ∢ A se opone al lado BC, el ∢ B se opone al lado AC y el ∢ C se opone al lado AB y respectivamente.

Los ángulos exteriores de un triángulo tienen como vértice un vértice del triángulo, como lados: un lado del triángulo y la prolongación del otro en el vértice considerado.



Es importante destacar que en cada vértice se forman 2 ángulos exteriores que son iguales por ser ángulos opuestos por el vértice, pero cuando se habla de los ángulos exteriores de un triángulo, solo se hace referencia a 3, uno en cada vértice.

Reafirmado el concepto triángulo debe elaborarse su clasificación atendiendo a la medida de sus lados y a la de sus ángulos.

Para lo antes planteado pueden existir también diferentes variantes metodológicas:

1. Se le ofrece a los escolares la clasificación para que comprueben experimentalmente las afirmaciones que se hacen mediante la medición de lados y ángulos.

2. Se les brinda un conjunto de triángulos en los que se presenten los tres tipos que se van a estudiar (puede ser mediante una hoja de trabajo). Se puede indicar medir los lados (los ángulos) y que extraigan conclusiones sobre las relaciones entre sus lados (sus ángulos). Los docentes pueden dar impulsos para guiar la atención hacia lo que se quiere.

Después pueden reagruparlos atendiendo a las mismas características:

1. Hay triángulos que tienen lados iguales y otros que no tienen lados iguales.

2. Hay triángulos que solamente tienen ángulos agudos, hay otros que tienen 2 agudos y uno recto y otros tienen 2 ángulos agudos y uno obtuso. Todos tienen al menos 2 ángulos agudos.

Después de formadas las clases de triángulos según las características de sus lados (de sus ángulos) los docentes les dará el nombre que recibe cada clase. En el caso de la clasificación según sus lados debe quedar claro que los triángulos equiláteros son una clase especial de los triángulos isósceles, es decir: *Todo triángulos equilátero es isósceles, pero no todo triángulo isósceles es equilátero.*

La hoja de trabajo debe estar concebida para que los escolares a partir de impulsos dados por los docentes puedan llegar a:

1. Establecer relaciones entre ambas clasificaciones:

- Ningún triángulo equilátero puede ser rectángulo, ni obtusángulo.
- Los triángulos isósceles pueden ser acutángulos, rectángulos u obtusángulos.
- Los triángulos escalenos pueden ser acutángulos, rectángulos u obtusángulos.

2. Establecer relaciones entre lados y ángulos.

- Escalenos: Los tres ángulos son diferentes.
- Isósceles: Los dos ángulos opuestos a los dos lados iguales, también son iguales.
- Equilátero: Los tres ángulos miden lo mismo (son iguales).

Por tanto, los escolares podrán concluir a partir de este trabajo práctico una nueva verdad matemática: *"A lados diferentes (iguales) se oponen ángulos diferentes (iguales) y recíprocamente".*

Para motivar la desigualdad triangular se les pueden dar a los escolares varillas de distintos tamaños para que comprueben si se pueden formar o no triángulos con ellas. Con algún trío de varillas no se podrá formar un triángulo, luego parece que existen condiciones para las longitudes de lados, que deben encontrarse.

Para encontrar esas condiciones los docentes pueden utilizar un trío con el que no se puede formar un triángulo y comparar la suma de las longitudes de 2 lados con la del tercer lado y preguntar ¿qué debe suceder? Para ellos puede seguir comparando las sumas en otros tríos de varillas, también se puede retomar la hoja de trabajo que se empleó para la clasificación de los triángulos. De esta forma se podrá concluir: "*En todo triángulo, la longitud de cada lado es menor que la suma de las longitudes de los otros dos lados".*

Para motivar el teorema de los ángulos interiores de un triángulo se puede retomar la hoja de trabajo empleada para la clasificación de los triángulos, orientando en este caso sumar las amplitudes de los 3 ángulos interiores de cada triángulo. Los escolares observarán que si redondean al múltiplo de 10 más cercano obtiene que suman 180^0, es decir: *"La suma de las amplitudes de los ángulos interiores de un triángulo es 180^0".* Debe hacer notar que es posible que no en todos los casos se obtengan 180^0 debido a las posibles imprecisiones al medir con el semicírculo. Existen otras variantes para la búsqueda de esta suposición utilizando el material concreto, pero en todas es necesario despertar en los escolares la necesidad de argumentarla (demostrarla). Aunque también se puede obtener mediante el siguiente ejercicio que garantiza su veracidad:

Si en un triángulo ABC se cumple que CD // BA y E un punto de la semirrecta BC. Demuestra que $\sphericalangle$ BAC + $\sphericalangle$ ABC + $\sphericalangle$ ACB = 180^0.

Si se sustituye la exigencia del ejercicio anterior por Demuestra que $\sphericalangle$ ACE = $\sphericalangle$ ABC + $\sphericalangle$ BAC,

Se puede obtener otra afirmación sobre los ángulos de un triángulo, en este caso el teorema del ángulo exterior. También se puede utilizar como vía la medición y el trabajo con el material concreto de modo que los escolares comparen la amplitud de cada ángulo exterior con las de los ángulos interiores hasta que lleguen a: *"En todo triángulo la amplitud de cada ángulo exterior es igual a la suma de las amplitudes de los ángulos interiores no adyacentes a él".*

Con el mismo material concreto se puede pedir que se midan los 3 ángulos exteriores, que suman las mediciones y los escolares podrán observar que aproximadamente cada suma es igual a 3600, por que se pueden obtener la siguiente suposición de los ángulos exteriores de un triángulo: "La suma de las amplitudes de los ángulos exteriores de un triángulo es igual a 3600". De esta forma se concluye el estudio del triángulo, la ejercitación debe estar dirigida a la fijación de los teoremas mediante ejercicios de argumentación y cálculo de amplitudes de ángulos. Debe aprovecharse para sistematizar las propiedades de las parejas de ángulos.

Los *cuadriláteros* y sus propiedades constituyen otro aspecto importante dentro del tratamiento de los polígonos. Aunque los escolares han ido aprendiendo en grados anteriores. Lo fundamental que debe lograr los docentes es que se dominen las características que definen a cada uno y que sepan establecer relaciones entre los conceptos, incorporando en ellos un vocabulario más preciso en cuanto a los términos matemáticos. Por ejemplo no aceptar que los escolares digan que: *Los cuadriláteros son figura que tienen 4 lados*, pues figura no es el concepto genérico adecuado para el concepto de cuadrilátero, existen figuras que tienen 4 lados y no son cuadriláteros.

Se debe insistir en el criterio fundamental que se utiliza para clasificar los cuadriláteros:

1. Los que no tienen lados paralelos (trapezoides).

2. Los que tienen lados paralelos (trapecios).

Considerando este criterio de clasificación, al segundo grupo es al que se le debe brindar especial atención. No obstante, dentro de los trapezoides, se desataca el que tiene 2 pares de lados consecutivos iguales, pero no hay 3 lados iguales (trapezoide simétrico). *El trapezoide que no es simétrico se llama trapezoide asimétrico y es el cuadrilátero más general.*

En el segundo se puede realizar una partición de 2 subconjuntos, teniendo en cuenta cuántos pares de lados paralelos tienen, pero todos se denominan trapecios por tener al menos un par de lados opuestos paralelos.

1. El primer subconjunto son los que tienen solamente un par de lados opuestos paralelos (Trapecio más general).

2. El segundo subconjunto son los que tienen sus 2 pares de lados opuestos paralelos llamados paralelogramos.

Los trapecios más generales pueden clasificarse atendiendo a la longitud de sus lados no paralelos en trapecio isósceles (lados no paralelos de igual longitud) y atendiendo a si uno de los lados no paralelos forma ángulos rectos con las bases (trapecio rectángulo).

Los trapecios del segundo grupo, llamados específicamente paralelogramos, se pueden subdividir en 3 subconjuntos: uno de ellos tienen sus 4 ángulos interiores rectos llamados *rectángulos,* otro que tiene sus 4 lados iguales llamados *rombos* y el tercer subconjunto que no cumplen ninguna de las propiedades anteriores (paralelogramo más general). Pero los 2 primeros subconjuntos tienen una intersección no vacía, es decir existen paralelogramos que tienen sus 4 ángulos rectos y sus 4 lados iguales, estos paralelogramos son tanto rectángulos como rombos y en particular se llaman *cuadrados*.

Los docentes deben lograr que los escolares interioricen las relaciones que están implícitas en la explicación anterior. De modo que puedan clasificar los cuadriláteros según el criterio dado y reconocer que:

1. Todos los cuadriláteros son polígonos de 4 lados.

2. Existen cuadriláteros que no son trapezoides.

3. Existen trapecios que no son paralelogramos, pero todos los paralelogramos son trapecios.

4. Existen paralelogramos que no son rectángulos, pero todos los rectángulos son paralelogramos.

5. Existen rectángulos que no son cuadrados, pero todos los cuadrados son rectángulos.

6. Existen paralelogramos que no son rombos, pero todos los rombos son paralelogramos.

7. Existen rombos que no son cuadrados, pero todos los cuadrados son rombos.

Otro aspecto importante a tener en cuenta al tratar los polígonos se refiere a que los escolares identifiquen cuáles son simétricas con respecto a una recta y/o cuáles con respecto a un punto. Determinando la cantidad de ejes de simetría que tienen.

3.4.1. El tratamiento del perímetro de polígonos en el segundo ciclo de la Educación Primaria

Lo fundamental que deben lograr los docentes es que los escolares comprendan los conceptos de perímetro y de área de polígonos, así como desarrollar habilidades con su cálculo en ejercicios formales, ejercicios con texto y problemas, relacionados con la vida práctica.

El concepto de polígono, las habilidades en la medición y el trazado y las unidades de longitud son condiciones previas para que los escolares comprendan el nuevo conocimiento.

El concepto de perímetro se puede introducir manera muy sencilla, por ejemplo: se indica a los escolares que midan el contorno de un libro, la mesa del maestro o cualquier otro objeto plano del aula y que sumen las longitudes de todos los lados. Esto es suficiente para definir el concepto de perímetro, como la suma de las longitudes de los lados de un polígono. También se puede hacer a partir de una situación de la vida:

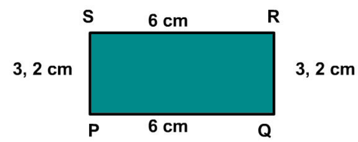
¿Qué cantidad mínima de metros de hilo se amarrar una caja de forma de ortoedro? (Se puede presentar una situación real en el salón)

No se trata que los escolares aprendan fórmulas particulares, la idea es que comprendan el concepto de perímetro, lo apliquen a todos los polígonos, utilizando las propiedades de los polígonos particulares (triángulos isósceles, triángulo equilátero, paralelogramo y rombo) para facilitar su cálculo. También resulta importante que los datos se den en diferentes unidades de longitud para que tengan que hacer conversiones.

Por ejemplo:

Calcula el perímetro de un rectángulo cuyos lados miden respectivamente 6, 0 cm y 3,2cm.

Observa que en el ejercicio anterior no se representa la figura, los escolares tienen que identificar la figura que corresponde y sus propiedades. Es conveniente que ellos representen la figura y coloquen los datos teniendo en cuenta las propiedades del rectángulo.



P = a + b + c + d

P = 6,0 cm + 3,2 cm + 6, 0cm + 3,2 cm

P = 18,4 cm

También se puede plantear:

P = 2 . 6,0 cm +2 . 3, 2 cm	P = 2(6,0cm + 3,2 cm)
P = 12,0cm + 6,4cm	P = 2 . 9,2 cm
P = 18,4 cm	P = 18,4 cm

Estas 2 últimas formas se pueden expresar mediante las siguientes respectivas fórmulas, pero es necesario que los escolares la dominen, aunque lo más importante es que las comprendan:

P = 2 . a + 2 . b y **P = 2 (a + b)**

Las exigencias para la solución de los problemas ya se han señalado anteriormente, no obstante no es contradictorio que en este caso los docentes enseñen a los escolares a organizar los datos y elementos necesarios para la solución de cada problema, esto ayudará a determinar el tipo de figura o dificultad del problema en sí (o sea, datos expresados en diferentes unidades, datos innecesarios, datos insuficientes, etcétera).

3.4.2. El tratamiento del área del rectángulo y del ortoedro en el segundo ciclo de la Educación Primaria

Para el tratamiento del *cálculo de área* deben garantizarse las siguientes condiciones previas c*oncepto de superficie* y sus *unidades*. Para introducir el concepto superficie los docentes deben, a partir de representantes, destacar que las figuras geométricas tienen una cierta "extensión" y que esa extensión está representada por la parte del plano limitada por su borde o contorno. Pueden apoyarse también en el piso del aula, las paredes, el pizarrón, y que los escolares comprendan que ya saben cómo calcular el perímetro de algunas de las figuras, es decir, la longitud de su borde o contorno, pero que no saben cómo obtener la "extensión" o "superficie" que está comprendida dentro de su perímetro. Esto puede servir de motivación para el trabajo que viene a continuación, pues debe concluirse que van a aprender nuevas unidades que permitirán expresar la cantidad de superficie de una figura plana, así como calcular la de algunas figuras geométricas conocidas.

Se puede presentar en papel cuadriculado distintas figuras, entre la que debe encontrarse un rectángulo de modo que los escolares puedan contar la cantidad de cuadrículas que hay dentro y concluir que esa es una manera de "medir" la superficie de esas figuras: cubriéndolas con cuadraditos unidad que en este caso son las cuadrículas del papel. Deben saber que a la cantidad de cuadraditos unidad que cubre la figura se le llama área de esa figura.

Posteriormente los escolares deben trabajar con varios rectángulos cuyas superficies tengan 12 cuadraditos de 1 cm^2. Por ejemplo: un de 1cm . 12cm, otro 3cm . 4cm y por último uno de 2cm . 6cm.

Se les indica a los escolares que deben medir con su regla un lado de uno de los cuadraditos interiores del rectángulo y concluir que mide 1 cm. Se destacará que ese cuadradito que tiene 1 cm de lado tiene un área que se va a denominar *un centímetro cuadrado* lo que se escribirá 1 cm^2.

Debe preguntarse entonces: ¿Cuántos centímetros cuadrados hay en cada rectángulo? Entonces el área de cada rectángulo es 12 cm^2, se escribe A = 12 cm^2. Debe llamarse la atención de que los rectángulos no son iguales pero tienen la misma área.

Seguidamente para obtener la fórmula para calcular se sugiere a los docentes preguntar: ¿Cómo obtener el área de rectángulo sin contar los cuadraditos de 1 cm2 de unidad, si se sabe que su ancho es de 2 cm y su largo de 4cm?

Los escolares podrán concluir que el área de un rectángulo se puede calcular multiplicando las longitudes del ancho y el largo. Se les informa que la fórmula es: A = a . b, siendo *a* el ancho y *b* el largo.

Posteriormente se debe elaborar el concepto de metro cuadrado (m^2) para lo que se sugieren 2 vías: los docentes pueden llevar en cartulina previamente representado un metro cuadrado o indicar a los escolares que tracen en una cartulina (puede ser trabajo colaborativo) un cuadrado que tenga un metro de lado, en cualquiera de las vías es necesario hacer observar que el cuadrado contiene 100 cm^2 y se dice que el área de este cuadrado es 1m^2. Debe concluirse que: $1m^2 = 100cm^2$.

Los docentes deben destacar que el metro cuadrado es la unidad fundamental de las unidades de superficie e insistir en que los escolares tengan una idea clara de la superficie que ocupa. Puede concluirse este trabajo midiendo el largo y el ancho del piso del aula (o del pizarrón) y calcular el área en metros cuadrados.

Los escolares deben percatarse de que a cada unidad de longitud se puede hacer corresponder una unidad de superficie.

A partir de lo anterior se explica a los escolares los múltiplos y submúltiplos del metro cuadrado, escribiéndolos en el pizarrón con su símbolo y relación con el m^2.

Múltiplos	kilómetro cuadrado - km^2 = 1 000 000 m^2 hectómetro cuadrado - hm^2 = 10 000 m^2 decámetro cuadrado - dam^2 = 100 m^2

Submúltiplos	decímetro cuadrado - dm^2 = 0,01 m^2 centímetro cuadrado - cm^2 = 0,000 1 m^2 milímetro cuadrado - mm^2 = 0,000 001 m^2

También se debe explicar cómo en la actualidad el hectómetro cuadrado y el decámetro cuadrado han adoptado otro símbolo:

hectómetro cuadrado (hm^2) = hectárea (ha)

decámetro cuadrado (dam^2) = área (a)

Es necesario que los escolares comprendan cómo se obtiene de cada unidad conocida la inmediata superior o inferior y resumirlo en la propiedad:

Cada unidad es 100 veces mayor que la inmediata inferior y 100 menor que la inmediata superior.

De lo anterior se infiere que cuando se desea pasar de una unidad mayor a la inmediata inferior hay que multiplicar, en este caso, por 100 y de una menor a la inmediata superior hay que dividir, en este caso, por 100. Esto es muy importante para las conversiones.

Aquí también pueden hacer uso de un medio en forma de escalera y que al igual que con las unidades de longitud les facilitará realizar las conversiones, por lo que es conveniente que los escolares la memoricen.

Para que memoricen los múltiplos y submúltiplos del metro cuadrado se pueden realizar ejercicios orales de conversión de una unidad mayor a otra menor y viceversa. Después puede dar una unidad cualquiera y pedir la que le sigue, o la que está antes, o todas las que le siguen, o que están antes.

Debe informársele, además, sobre otra unidad de superficie que no pertenece al Sistema Internacional de Unidades (SI) pero que se usa en nuestro país e indicarles que lean en su libro de texto su equivalencia con el metro cuadrado. Destacar que la caballería, la hectárea y el área se emplean en la medición de terrenos por lo que se les llama unidades agrarias:

Caballería (1 cab = 134 202 m^2)

Los docentes deben organizar la ejercitación de modo que se contribuya a la comprensión del concepto y cálculo del área y la relación que existe entre ellos. Por otro lado, el cálculo de áreas totales de ortoedros debe verse como una aplicación del cálculo de áreas. Para que los escolares comprendan lo que deben hacer, los docentes pueden llevar preparado un ortoedro de cartulina de manera que lo puedan desarrollar. Pueden preparar varias plantillas con el ortoedro desarrollado y los escolares deben trazarlo en sus libretas, medir las aristas, comparar las caras superponiéndolas, etcétera. Pueden preguntar entonces ¿qué cantidad de papel o cartón se ha empleado en la confección del ortoedro?, ¿cómo se calcula el área del rectángulo?

La primera pregunta es un motivo para orientar hacia el objetivo y hacer que reconozcan la importancia de esta actividad en la práctica. Aquí lo fundamental es que comprendan que hay tres pares de caras diferentes que son rectángulos. Para la búsqueda de pares de longitudes de cada uno de esos rectángulos los escolares pueden observar que si las dimensiones del ortoedro son a, b, y c, los pares de lados de los rectángulos son las "combinaciones" que se pueden formar con ellos tres:

a b c **a . b**, **a . c** y **b . c**

Finalmente el área total del ortoedro se calcula de la siguiente forma.

A = 2(a . b) + 2(a . c) + 2(b . c)

3.5. Sugerencias metodológicas para el tratamiento de los movimientos del plano en el segundo ciclo de la Educación Primaria

Los docentes deben tener en cuenta las habilidades que se han trabajado en el primer ciclo sobre los movimientos del plano, en el segundo se trata de profundizar en este contenido. El estudio de la simetría axial como propiedad de algunas figuras geométricas y la introducción del concepto de movimiento, de una forma aún no rigurosa, permiten que los escolares adquieran un procedimiento geométrico constructivo que posibilite obtener figuras iguales de una forma más precisa.

Lo fundamental que los docentes deben lograr en los escolares es que reconozcan figuras que posean la propiedad de simetría axial, así como sus respectivos ejes, obtenidos mediante doblado de papel, el calcado y trabajo en papel cuadriculado.

Como cuestión significativa puede señalarse que el estudio detallado de la simetría axial como propiedad de algunas figuras geométricas posibilita introducir la noción de correspondencia entre puntos, que después será necesaria para el tratamiento de los movimientos, así como la igualdad de las partes que son correspondientes.

Para introducir el concepto de simetría axial existen muchas variantes. Los docentes pueden preparar hojas de trabajo con triángulos y cuadriláteros para que los escolares investiguen si existe alguna recta de doblez que los divida en dos partes iguales. En otros casos calcar figuras simétricas con el mismo objetivo.

Pueden utilizar también la experiencia de la gota de tinta, es decir, coger hojas de papel y dejarle caer una pequeña gotica de tinta o pintura y pedirle entonces que doblen la hoja a la mitad.

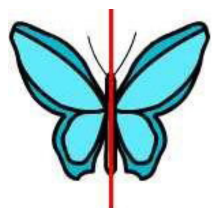
Esta variante es muy rica pues da la posibilidad de que surjan tanto una figura simétrica como un par de figuras simétricas según donde esté la gota de tinta y la recta de doblez que se escoja.

De este primer trabajo experimental se debe concluir:

1. Una figura es simétrica si podemos encontrar una línea imaginaria que la divida en dos partes iguales.

2. A la recta de doblez se le llama eje de simetría.

3. La figura tiene simetría axial si existe una recta imaginaria que la divida en dos partes iguales.

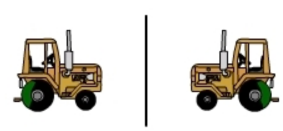


Es importante destacar que existen figuras que tienen más de un eje de simetría.

Entre los ejemplos de la práctica realizada anteriormente se deben concluir con respecto a pares de figuras:

1. Se llaman figuras simétricas con respecto a un eje a los pares de figuras para los que existe un eje de simetría.

2. Los pares de figuras simétricas con respecto a un eje son iguales.



eje de simetría

A partir de aquí se recomienda organizar una ejercitación que incluya:

1. Reconocer figuras simétricas.

2. Sistematizar los triángulos y cuadriláteros simétricos.

3. Reconocer y determinar ejes de simetría.

Entre los ejercicios pueden plantearse las siguientes acciones: completar por calcado la parte que falta, esbozarla siguiendo la información que dan las cuadrículas, reconocer figuras simétricas y trazar ejes de simetría en papel cuadriculado como recurso para aprovechar las características de las cuadrículas.

Posteriormente se pasa a abordar las propiedades de los puntos simétricos en una simetría axial, dando así nociones de correspondencia entre puntos como condición previa para el trabajo con movimientos.

Lo fundamental que deben lograr los docentes es que los escolares comprendan que entre los puntos de las figuras simétricas se puede establecer una correspondencia y aprendan qué propiedad tienen estos puntos correspondientes o simétricos.

Al doblar la hoja por la recta de doblez y superponer las partes iguales, es evidente que cada punto (A, B, C) de una parte le corresponde, o se superpone en este caso, con un punto (A´, B´, C´) de la otra parte. Puede utilizarse un alfiler y perforar la hoja para así obtener puntos correspondientes. Lo importante es analizar si esos puntos correspondientes cumplen alguna propiedad. Pueden dejar que los escolares vayan planteando sus hipótesis y siempre que sea necesario los docentes pueden estimular el análisis con algunas preguntas:

1. ¿A qué distancia se encuentran A y A′ del eje? ¿Sucede lo mismo con los otros puntos simétricos?

2. ¿Qué relación existe entre el segmento AA′ y el eje? ¿Sucede lo mismo con BB′ y DD′?

3. ¿Qué sucede con el correspondiente de C? ¿Dónde está situado C?

Sobre esta base debe concluirse: *"Dos puntos simétricos están sobre una perpendicular al eje de simetría y a igual distancia de él. Si están en el eje, entonces coinciden".*

Es importante aquí informar que se acostumbra con frecuencia a denotar el punto simétrico de otro utilizando la misma letra pero con "prima" (′), pero que esto no necesariamente es así.

Después de reconocida la propiedad de los puntos simétricos se le da tratamiento al procedimiento constructivo para trazar puntos simétricos. Los escolares deben aprender cómo trazar con regla, cartabón y compás puntos simétricos y pueda iniciar el desarrollo de habilidades en la construcción de figuras simétricas, actividad que continuarán realizando en la ejercitación relativa a la reflexión en un plano. Los docentes deben lograr que los escolares vayan proponiendo los pasos del procedimiento para lo cual pueden utilizar impulsos mediante preguntas.

Se busca la imagen de A:

1. ¿Qué relación debe existir entre el eje r y la recta que contiene a A′?

2. ¿Por dónde debe pasar esta recta?

3. ¿A qué distancia deben estar A y A′ del eje?

Otra variante metodológica podría ser darles los pasos y a la vez que los realizan que vayan analizando por qué se dan esos pasos.

El trazado de la perpendicular a r que pase por cada punto puede hacerse mediante el procedimiento aprendido en los grados anteriores, utilizando regla y la escuadra (cartabón).

Como consecuencia del tratamiento de las figuras simétricas se pueden introducir:

1. El concepto mediatriz de un segmento y sus propiedades.

2. El concepto bisectriz de un ángulo y sus propiedades.

Los conceptos mediatriz y bisectriz pueden introducirse a la vez, a partir del problema:

¿Son simétricos con respecto a un eje, los segmentos y los ángulos?

Con plantillas o modelos de papel, doblando conveniente, los escolares pueden investigar rápidamente esto y proponer sus hipótesis sobre cuáles podrían ser los ejes de simetría en cada caso.

Después de concluido este trabajo debe explicarse a los escolares que esos ejes tienen nombres especiales y escribirlos en el pizarrón. Es importante que en este trabajo previo intuitivo se concluyan algunas propiedades de estos dos objetos geométricos que son una consecuencia inmediata de lo ya conocido sobre la simetría axial:

1. La mediatriz es perpendicular al segmento y pasa por su punto medio.

2. Todos los puntos de la mediatriz (y solo ellos) equidistan de los extremos del segmento.

3. La bisectriz, parte del vértice del ángulo y lo divide en dos ángulos iguales.

Garantizadas estas condiciones previas se puede pasar a discutir el procedimiento para el trazado con regla y compás de la mediatriz de un segmento. Es importante destacar que este mismo procedimiento es el que se utiliza para determinar el punto medio de un segmento. Es importante que la longitud del radio de las circunferencias que se trazan tienen que ser iguales y mayor que la mitad de la longitud del segmento.

El trazado de la bisectriz debe verse como una aplicación del trazado de la mediatriz, por ello el algoritmo para su construcción se puede simplificar reduciéndolo al trazado de la mediatriz de un segmento.

Resulta importante relacionarlos conceptos de mediatriz y bisectriz con los ejes de simetría en las figuras estudiadas, por ejemplo: el triángulo isósceles tiene dos lados iguales, luego el vértice que se opone a la base está a la misma distancia de los extremos de ella, pertenece a la mediatriz, por tanto la mediatriz coincide con el eje de simetría y como este eje divide a ese ángulo en dos iguales, tiene que ser bisectriz también. No debe concluirse este trabajo con figuras simétricas sin antes informar a los escolares que también existen muchos cuerpos que son simétricos. En este caso deben saber que no existe una recta, sino un plano de simetría.

El tratamiento de figuras simétricas es una condición previa para abordar el concepto de movimiento e igualdad. El trabajo con los movimientos del plano sin perder su rigor matemático, no puede descuidar la relación que se establece con la vida. Es importante que los docentes logren que los escolares comprendan el concepto movimiento, visto como una correspondencia especial de puntos del plano. Las propiedades de los movimientos también deben comprenderlas, pues serán utilizadas posteriormente.

Las condiciones previas sobre la correspondencia de puntos fueron abordadas, sin elaborar el concepto general de correspondencia que no se hace, al estudiar la simetría axial. Este concepto se limitó a puntos correspondientes entre figuras y ahora se debe extender a puntos cualesquiera del plano.

Para comenzar es conveniente recordar algunos movimientos (físicos mecánicos) que pueden hacerse sobre un plano. Para ello los docentes pueden utilizar modelos de figuras geométricas planas y "moverlos" sobre el plano del pizarrón. En este trabajo debe precisar que:

1. En ese movimiento a cada punto de la figura original le corresponde un único punto en la imagen.

2. La figura original y su imagen son iguales, pues por ese movimiento no sufren deformación alguna ni en su forma ni en su tamaño.

Para lo primero pueden abrirle pequeños orificios en el modelo de modo que puedan dejar marcado en el pizarrón puntos originales y puntos imágenes. Esto deben aprovecharlo para introducir esas denominaciones.

Extender esta correspondencia entre puntos de figuras y puntos cualesquiera del plano, es un momento metodológico importante que los docentes deben preparar bien. Una variante puede ser preparar una cartulina (o una placa transparente si la posee) donde aparezca una figura y puntos perforados, dentro y fuera de la figura. Al mover la figura se mueve en realidad toda la cartulina, y no solo son los puntos de ella los que tienen sus correspondientes por el movimiento, sino cualquier punto del plano. Esto debe quedar bien destacado.

En el trabajo anterior deben quedar explícitas las propiedades generales de los movimientos y bien fijado la siguiente proposición: *"Una figura y su imagen por un movimiento siempre son iguales y si 2 figuras no son iguales entonces ninguna de ellas es imagen de la otra por un movimiento".*

El primer movimiento que se propone estudiar es la *reflexión del plano en una recta.* Lo fundamental que deben lograr los docentes al abordar este movimiento es que los escolares comprendan que la reflexión es un ejemplo de movimiento en el plano y aprendan cómo se establece la correspondencia entre sus puntos. Lo anterior deben hacerse en estrecha relación con el trabajo realizado con la simetría axial, pues la reflexión no es más que la extensión de la simetría axial a puntos cualesquiera del plano, por lo que los conocimientos sobre simetría pueden ser utilizados para la etapa físico mecánica de la reflexión.

Quiere esto decir, que este primer ejemplo de movimiento puede motivarlo mediante situaciones concretas conocidas por los escolares, como por ejemplo: utilizando un espejo donde aparece una figura original y su imagen reflejada en él: una lámina donde se muestre un paisaje que se refleja sobre las aguas de un río, etcétera. Para pasar al trabajo con modelos se pueden utilizar representaciones de figuras simétricas y aprovechar esta oportunidad para plantear que la correspondencia que se establece entre las figuras simétricas, puede extenderse a todos los puntos del plano que las contiene.

Puede ilustrar esta correspondencia con modelos hechos en el pizarrón en cartulina o en papel y destacar que en este modelo, la cartulina (o lo que se utilice) representa el plano. El triángulo se transforma en otro igual que él. Cada punto del triángulo original tiene un correspondiente, y cada punto del plano, fuera del triángulo, tiene también un correspondiente.

Esa correspondencia es ya conocida por los escolares, pero limitada a figuras, ahora hay que extenderla a todo el plano que contiene la figura y se cumple que:

1. Cada punto tiene exactamente un punto imagen.

2. Una figura y su imagen son iguales.

Esto debe permitir concluir que se trata de un movimiento del plano que se llama *reflexión con respecto a una recta* y con el trabajo realizado con la simetría axial los escolares deben estar en condiciones de describir cómo se obtiene la imagen de cada punto (definición constructiva) pasando con ello a la etapa del proceso geométrico constructivo. Se debe concluir que es exactamente la misma pero en la simetría se refería solo a puntos de las figuras que eran simétricos y aquí se consideran todos los puntos del plano.

Es importante en este trabajo destacar que a "la recta de doblez" en una reflexión se le llama eje de reflexión, y que sin él no es posible realizarla. Para lograr que comprendan esta necesidad puede darse uno o varios puntos en un papel cuadriculado y pedirles que hallen la imagen por reflexión (sin indicar un eje). Esto debe provocar una contradicción pues, no lo realizan, o cada uno escoge un eje diferente.

En ese mismo problema, una vez indicada la necesidad del eje, se puede plantear la misma situación pero precisando la imagen de uno de los puntos. Debe lograrse que los escolares comprendan que esa información también es suficiente, pues permite determinar el eje (mediatriz del segmento determinado por un y su imagen) y partir de él la imagen de los restantes puntos.

Es conveniente presentar ejercicios en papel cuadriculado para producir una discusión sobre cuáles son los puntos correspondientes y por qué, insistiendo en las características para argumentar, tales como las relaciones de igualdad, paralelismo y perpendicularidad.

También es prudente, para fijar la definición constructiva de la reflexión, el trabajo con coordenadas que, además de contribuir a fijar la definición, permitirá desarrollar habilidades de ubicación en el plano mediante la localización e identificación de puntos por sus coordenadas. Esto tiene un alto valor instructivo, dentro y fuera de la Matemática, desarrollando habilidades intelectuales de carácter general como por ejemplo la observación.

Los docentes deben concebir un sistema de ejercicios encaminados al reconocimiento, construcción y argumentación de modo que contribuyan a que los escolares, a la par que fijan la definición constructiva de la reflexión, continúen desarrollando su pensamiento geométrico en ejercicios donde tengan que reconocer, contribuir de forma opcional y argumentar sobre la base de las propiedades estudiadas. Para ello se debe lograr que los escolares participen de una forma activa en la ejercitación, con etapas de trabajo independiente, etapas de discusión colectiva de soluciones y siempre que sea necesario se cuente con la participación del maestro precisando, aclarando aquellos aspectos que ofrezcan dudas o no hayan sido bien concluidos por los escolares.

Para el tratamiento del movimiento de traslación primero es necesario abordar el concepto de vector. Lo fundamental que deben lograr los docentes es que sus escolares comprendan el concepto vector, que puedan trazarlo y reconocer vectores iguales.

Las condiciones previas más importantes para el tratamiento del concepto vector, en dependencia de las necesidades de los escolares, que pueden o no ser activadas, son las relaciones de posición entre rectas y el trazado de rectas paralelas con regla y cartabón. Para esto pueden realizarse algunas actividades previas de trazado de rectas que se cortan y de rectas paralelas.

El concepto vector tiene tres elementos que los caracterizan: dirección, sentido y longitud. Lo anterior indica que hay que lograr que los escolares tengan la noción de dirección y sentido, pues la longitud ya la conocen. Para ello puede utilizarse una situación problémica. Si nos encontramos en el cruce de dos calles y queremos encontrar una casa que está en una de las dos, ¿qué debemos conocer?

Indudablemente que la primera respuesta es que debemos conocer cuál de las dos calles nos interesa, dicho en otras palabras, cuál de las dos “direcciones” escoger, la dirección que nos indica una de las calles o la que nos indica la otra calle. Luego la idea de “dirección” nos la puede dar una recta (representada por la calle), así como que las rectas paralelas definen una misma dirección y las que se cortan direcciones diferentes.

La segunda pregunta que debemos hacer es si basta conocer la calle en que está la casa (la dirección en este caso). Indudablemente que no basta conocer la calle pues puede estar hacia un lado o hacia el otro de la calle. Esto puede ilustrarse en el pizarrón. Entonces es necesario, además, conocer en qué “sentido” se encuentra. Aquí se debe destacar que toda recta se puede recorrer en dos sentidos opuestos.

Estas ideas de dirección y sentido pueden reforzarse con actividades prácticas en la propia aula, parando dos escolares cada vez, ubicándolos en un punto de uno de los pasillos entre los asientos (el pasillo indicará la dirección) y haciendo caminar uno en un sentido y el otro en el sentido opuesto.

Regresado al problema inicial es probable que los escolares se den cuenta que aún con la información que tenemos, no podemos llegar a la casa que queremos, es necesario, además, saber a qué distancia se encuentra la casa de donde estamos situados. Esto se puede representar en el pizarrón.

En resumen, se necesita una dirección, un sentido y una longitud. Estas ideas pueden ilustrarse también en el movimiento de un corredor. Finalmente se debe concluir que: a un segmento en el que se le considera un sentido se le llama vector y que por tanto este tiene una dirección, un sentido y una longitud.

Es necesario que se indique claramente cómo se denotan los vectores y la importancia que tiene, si se denotan por dos letras, el orden de ellas para precisar el sentido. También debe introducir el signo de vector ($\rightarrow$).

Este signo se debe colocar n la parte superior de las 2 letras, con una saeta que indica el sentido, por ejemplo:

La igualdad de vectores puede introducirse a partir de una hoja de trabajo, preferentemente en papel cuadriculado, con unos vectores que sean iguales y otros no, entre los que no son iguales deben aparecer algunos que solo tienen distinto el sentido. Posteriormente se debe orientar la observación de los escolares a aquellos que son *paralelos con igual sentido* e *igual longitud*, informando que estos vectores son iguales y los que solamente se diferencian en el sentido son *vectores opuestos*.

Para completar el trabajo, solo queda el trazado de vectores iguales. Este procedimiento es muy importante para el movimiento de traslación y para precisar los pasos de dicho procedimiento, puede promoverse una conversación con los escolares a partir de una pregunta que puede ser como la siguiente:

¿Cómo trazarías un vector igual al vector AB? ¿Este vector puede estar dibujado en el pizarrón?

Es casi seguro que se den cuenta que hay que trazar paralelas, y considerar una longitud igual a la del vector AB. Debe aprovecharse esto para ir haciendo un trazado correcto, utilizando regla y cartabón, y el compás para el transporte del segmento. Debe discutirse sobre cómo precisar el sentido.

Después de abordado lo relativo a los vectores se pasa a darle tratamiento al movimiento de traslación. Lo fundamental que deben lograr los docentes es que los escolares adviertan que la traslación es un ejemplo de movimiento en el plano y que aprendan cómo se establece la correspondencia entre sus puntos.

Para motivar este nuevo movimiento, pueden utilizarse ejemplos prácticos muy conocidos como el desplazamiento de un vehículo sobre una calle recta, el de un corredor de 100 m que se desplaza por un carril rectilíneo, el de una cajita de fósforos en la que su interior se desplaza, para abrirla o cerrarla, dentro de su parte exterior. Esto puede ilustrarse también con el movimiento del cartabón a lo largo de una recta, cuando se quiere trazar rectas paralelas (o perpendiculares).

Este movimiento, que forma parte del proceso físico mecánico, puede aprovecharse para introducir el término "traslación", o la expresión "se traslada" y destacar que el desplazamiento, en cada caso, se realiza siguiendo una dirección, un sentido y una longitud dada.

Para llegar a precisar que la traslación también es un movimiento, puede usarse una idea similar a la de la reflexión, utilizando una cartulina o una placa transparente (que van a representar un plano). En ella debe aparecer una figura cualquiera y puntos perforados, en el interior y en el exterior de esa figura.

Debe destacarse entonces que:

1. A cada punto del plano se le puede hacer corresponder otro punto.

2. La figura se transformó en otra igual a la primera.

Los escolares están en condiciones de concluir que se trata de un movimiento y puede promoverse una conversación con ellos para que sugieran cómo podría, conocido el vector de la traslación, obtenerse la imagen de cada punto. Otra variante sería darle el procedimiento. En cualquiera de las dos variantes es muy importante que los escolares se den cuenta que cada punto y su imagen determinan un vector igual al de la traslación, lo cual pueden comprobar experimentalmente con sus instrumentos de trazado.

Es muy adecuado plantear ejercicios para iniciar a los escolares en el desarrollo de habilidades en el reconocimiento de puntos correspondientes por una traslación con su debida argumentación (que están sobre líneas paralelas, que todos los segmentos determinados por un punto y su imagen tienen la misma longitud y que el sentido es el mismo).

Para la construcción de imágenes se hará notar a los escolares que se sigue el mismo procedimiento que se emplea para la construcción de vectores iguales. Debe planteársela problemática de la necesidad del vector que define a la traslación para poder realizarla. En ese mismo problema, una vez indicada la necesidad del vector, se puede plantear la misma situación pero precisando un punto y su imagen. Debe lograrse que los escolares comprendan que esa información también es suficiente, pues permite determinar el vector y partir de él la imagen de los restantes puntos.

La ejercitación seleccionada por los docentes debe estar dirigida a que los escolares fijen la definición constructiva de la traslación y continúen desarrollando su pensamiento geométrico mediante la solución de ejercicios de reconocimiento, construcción y argumentación.

Después del estudio de la reflexión con respecto a una recta y la traslación se aborda la *simetría central* o r*eflexión con respecto a un punto* como caso particular de *rotación*. El concepto rotación se introduce limitado al caso especial de la simetría central. No obstante, hay que dar algunas nociones intuitivas, dentro del proceso físico mecánico, acerca del movimiento de rotación en general. Lo fundamental que deben lograr los docentes es que los escolares comprendan que la simetría central es un ejemplo de movimiento en el plano y que aprendan cómo se establece la correspondencia entre sus puntos.

Para motivar este nuevo movimiento pueden utilizarse ejemplos muy conocidos por los escolares como el "tío vivo" y la estrella del parque de diversiones, las manecillas del reloj, etcétera. En estos ejemplos ya debe utilizarse el término de "rotación" y los puntos y ángulos de giro. Se recomienda elaborar un medio de enseñanza para ilustrar estos conceptos, también de manera sencilla se puede realizar una rotación de este alrededor de un punto, que permanece fijo, con un cierto ángulo.

Dentro de esta parte del proceso físico mecánico debe incluirse la rotación de algún objeto o modelo, con un ángulo de 180°. Para ello es muy útil el empleo de una varilla de madera, con un clavito en su centro o punto medio, y alguna figura de cartulina en uno de sus extremos. Si se dibuja una recta en el pizarrón, se coloca la varilla sobre la recta, y se rota 180°, el escolar observará que se ha realizado una rotación de 180° y, además, cómo queda la figura imagen con respecto a la original. Este resultado se debe aprovechar para informar a los escolares que una rotación de 180° se llama simetría central o reflexión con respecto a un punto y que esa es lo que van a estudiar. Además, debe denominarse centro de simetría al punto de giro, o sea al que permanece fijo.

Debe representarse varios ejemplos de simetría central con material de modo que los escolares estén en condiciones que cuando se realiza ese movimiento, todos los puntos del plano tienen sus correspondientes (no solo los que se han destacado) y que, además, las figuras se transforman en otras iguales a ellas, luego están en presencia de un movimiento. Pueden además, comprobar experimentalmente, utilizando su regla y el compás, que en la simetría central:

1. El centro de simetría es el punto medio del segmento determinado por cada punto y su imagen.

2. Los segmentos determinados por puntos correspondientes pasan por el centro.

La primera de estas dos características es la base para la definición constructiva de la simetría central, por lo que los docentes pueden dirigir el proceso de obtención de este procedimiento geométrico constructivo, realizando preguntas como por ejemplo:

¿Cómo se podría obtener la imagen de un punto P cualquiera por una simetría central?

Con esta pregunta no solo se puede lograr que den ideas del procedimiento, sino que comprendan la necesidad de tener previamente determinado un centro de simetría. Los escolares deben reconocer que es necesario conocer el centro de simetría para hallar la imagen de una figura dada, y su vez se les puede plantear la siguiente interrogante:

¿Cómo determinar el centro de simetría conocidas una figura y su imagen?

Para responder esta interrogante hay 2 soluciones que deben obtenerse a partir de un diálogo con los escolares, ellas son:

1. Determinar el punto medio de un segmento determinado por un punto y su imagen (trazando la mediatriz).

2. Determinar el punto de intersección de dos segmentos cualesquiera, determinados por puntos correspondientes.

Este último procedimiento es mucho más simple, y se puede usar siempre que se conozcan al menos dos pares de puntos correspondientes.

La ejercitación inicial debe estar dirigida a que los escolares fijen las propiedades del movimiento, no se debe pretender que realicen utilizando el procedimiento constructivo de hallar la imagen de una figura por simetría central (con regla y compás), sino que teniendo en cuenta las propiedades de los puntos simétricos y siguiendo los trazos en cuadrículas, reproduzcan la imagen en cada caso.

También debe lograrse que los escolares por simple inspección reconozcan si hay o no, incluso pueden encontrar el centro, uniendo por un segmento puntos correspondientes y comprobando que todos pasan por el mismo punto. En todo este trabajo es muy importante que los escolares observen que todo segmento y su imagen por una simetría central son paralelos, esta propiedad les será también muy útil para identificar de qué movimiento se trata y para comprobar la exactitud de las imágenes que construyan. Después de realizado este trabajo es conveniente ejercitar la construcción de imágenes por simetría central.

También se le debe dar tratamiento a los movimientos sucesivos o composición de movimientos. Al respecto resulta esencial que los niños reconozcan que la composición de 2 o más movimientos siempre es otro movimiento. En particular mediante ejercicios los escolares deben concluir que:

1. La composición de dos traslaciones es siempre otra traslación.

2. La composición de 2 reflexiones con respecto a ejes que se cortan en un punto es una rotación de centro en ese punto.

3. La composición de 2 reflexiones con respecto a ejes perpendiculares es una simetría central.

4. La composición de 2 reflexiones de ejes paralelos entre sí es una traslación

5. La composición de 2 simetrías centrales de centros diferentes es una traslación.

En resumen, mediante la ejercitación los docentes deben lograr que los escolares fijen la definición constructiva de la simetría central y que continúen desarrollando su pensamiento geométrico, mediante la solución de ejercicios de reconocimiento, construcción y argumentación. En particular, los escolares deben poder reconocer, dentro de las figuras planas conocidas, aquellas que son simétricas con respecto a un punto. Además también es muy importante analizar en cada movimiento en qué casos la recta imagen de otra es paralela a la original y en qué casos se transforma en ella misma.

3.6. Sugerencias metodológicas para el tratamiento de la geometría del espacio en el segundo ciclo de la Educación Primaria

Desde grados anteriores los escolares han estudiado los distintos cuerpos geométricos. Lo fundamental es sistematizar los conceptos, sus propiedades y relaciones. Durante su introducción se debió tener en cuenta el siguiente procedimiento:

1. Observación de propiedades geométricas en el medio.

2. Realización de generalizaciones empíricas.

3. Realización de generalizaciones teóricas.

4. Determinación de otras propiedades del concepto.

5. Búsqueda de nuevos objetos con esa forma geométrica en el entorno.

6. Dominio y sistematización de habilidades geométricas.

Es importante que los docentes tengan un diagnóstico de los escolares en cuanto al desarrollo de la habilidad de identificar cuerpos geométricos y en cuanto al dominio de las características esenciales de cada uno.

Es conveniente tener gran variedad de representantes de los cuerpos, diferenciándose por su tamaño y color. Lo primero que los docentes deben lograr que los escolares reconozcan la diferencia entre figura geométrica y cuerpo geométrico:

"Todos los puntos de una figura geométrica están situados en un mismo plano, mientras que no ocurre lo mismo para todos los puntos de un cuerpo".

Es conveniente que los escolares separaren los cuerpos en los que están *limitados solamente por superficies planas* y los que están l*imitados por alguna superficie curva (cuerpos redondos)*. Es decir el tipo de superficie, curva o plana es un primer criterio de clasificación.

Después se debe pasar al tratamiento de los cuerpos limitados solamente por figuras planas (prismas y pirámides). En este caso debe orientarse a los escolares a que busquen una diferencia esencial entre los representantes y se podrá concluir que: Algunos tienen 2 bases (prismas) y otros solamente una (pirámide). Posteriormente se pasa a precisar el concepto de prisma y de pirámide, insistiendo en sus respectivas características. En el caso de los prismas los escolares deben recordar que:

1. Los prismas son cuerpos geométricos limitados por 2 polígonos paralelos e iguales (bases) y por rectángulos cuyo número coincide con la cantidad de lados que tienen las bases.

2. Existen 2 casos especiales: ortoedro y cubo. Es importante que reconozcan que todo cubo es un ortoedro, pero que existen ortoedros que no son cubos.

3. La cantidad de aristas que tiene un prisma se puede calcular multiplicando por 3 la cantidad de lados que tiene una base y la cantidad de vértices multiplicando por 2.

En el caso de la *pirámide* deben recordar que son cuerpos geométricos limitados por un polígono (base) y por triángulos concurrentes en un punto (vértice) cuyo número coincide con la cantidad de lados que tiene la base. La cantidad de aristas que tiene una pirámide se obtiene multiplicando por 2 la cantidad de lados que tiene la base y la cantidad de vértices sumándole 1 a la cantidad de vértice de la base. Pudiera preguntarse: ¿Cuál es la base de un prisma que tenga en total 6 vértices? ¿Cuántas aristas tiene? El éxito de la respuesta de esta pregunta exige de un amplio trabajo del material concreto.

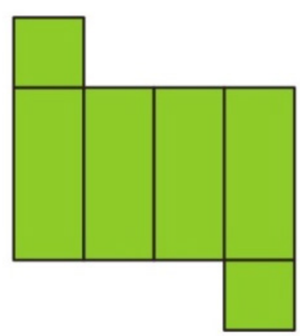
Al abordar los cuerpos redondos se debe hacer notar que algunos están limitados tanto por figuras planas como por curvas (cilindros y conos) y otros solamente por una curva (esfera). Al trabajar el *cilindro* es importante que se destaque que está limitado por dos superficies planas que son círculos como bases, y el resto es una superficie curva.

Luego que se presenten objetos del medio con forma de *cono* se considera importante que en modelos los escolares puedan destacar su diferencia con el cilindro: tiene una sola superficie plana que también es un círculo como base. En el tratamiento de la *esfera* se debe destacar que, a diferencia de los prismas y las pirámides, ella no tiene bases ni caras y está completamente formada por superficies curvas.

Otro aspecto muy importante a trabajar es el relativo al desarrollo de los cuerpos, deben plantearse ejercicios para que los escolares identifiquen el desarrollo de un cuerpo dado.

Ejemplo:

Determina a qué cuerpo geométrico corresponde el siguiente desarrollo.



También resulta productivo que aprendan a cómo construir el desarrollo de cuerpos y armarlos, a identificar caras desde diferentes vistas tanto en cuerpos simples como en compuestos.

3.6.1. El tratamiento del volumen del ortoedro

Especial atención merece el tratamiento del volumen del ortoedro, lo fundamental en este sentido es que los escolares tengan una representación mental de lo que es el volumen de un ortoedro y que lo pueda transferir al volumen de los restantes cuerpos. Las condiciones previas más importantes son la longitud de un segmento y el área del rectángulo, pues el volumen se elabora de manera análoga. Se recuerda que el área de un rectángulo se realizó por el conteo de un cuadradito unidad de 1 cm^2.

Es de vital importancia que los escolares dominen que volumen es el lugar que ocupa un cuerpo en el espacio tridimensional, teniendo todos los objetos volumen. A estas conclusiones deben llegar los escolares luego de analizar situaciones del entorno propuestas por los docentes.

Para la determinación del volumen del ortoedro se recomienda que los docentes presenten un cubito unidad de un 1 cm de lado y varios ortoedro (previamente analizados que el cubito unidad cabe una cantidad de veces exacta en los ortoedros). Sugerimos que sean ortoedros con las siguientes dimensiones:

Ortoedro 1: 2 . 3 . 4

Ortoedro 2: 1 . 6 . 4

Pasos a seguir:

1. Creación de una situación problémica:

Se conoce cómo calcular el perímetro de un polígono y el área de un polígono, en especial la de un rectángulo. ¿Cómo pudiera medirse la "extensión del ortoedro" o "lo que cabe dentro de un ortoedro"? En este momento se puede aprovechar para informarles que lo anterior se llama volumen del ortoedro.

2. Se muestra el cubito unidad:

Los docentes muestran a los escolares un cubito (puede entregarse uno por equipo) y les piden que midan sus lados, ellos comprobarán que mide un 1 cm de lado. Se les informa que ese cubito unidad representa a un centímetro cúbico y se escribe 1 cm^3.

3. Se compara el cubito unidad con varios ortoedros:

Los docentes informan que ahora se trata de averiguar el volumen de los ortoedros presentados inicialmente. Mediante una conversación los escolares podrán responder por analogía que aquí tenemos que ver cuántas veces cabe el cubito unidad en cada ortoedro. Al comparar se podrá concluir que cabe 24 veces en cada uno.

4. Precisiones finales:

Los docentes informará que el volumen de cada ortoedro es de 24 cm^3 y se escribe V = 24 cm^3. Seguidamente se les plantea a los escolares: ¿Cómo se puede calcular el volumen de los ortoedros sin comparar con el cubito unidad de 1 cm^3, conociendo solamente las dimensiones de largo ancho y altura? Se podrá concluir que multiplicando las 3 dimensiones: a . b . c. Para el ortoedro 1 se tiene V = 2cm . 3cm .4cm = 24 cm^3 y para el segundo V = 1 cm . 6 cm . 4 cm = 24 cm^3. También es conveniente destacar que los ortoedros no tienen las mismas dimensiones y sin embargo tienen el mismo volumen.

Después de elaborado el volumen del ortoedro se debe continuar con el tratamiento de las restantes unidades de volumen. Posteriormente se debe analizar los restantes múltiplos y submúltiplos del metro cúbico y concluir que:

"Cada unidad es 1 000 veces mayor que la inmediata inferior y 1 000 menor que la inmediata superior".

De lo anterior se infiere que cuando se desea pasar de una unidad mayor a la inmediata inferior hay que multiplicar, en este caso, por 1 000 y de una menor a la inmediata superior hay que dividir, en este caso, por 1 000. Esto es muy importante para las conversiones. Aquí también pueden hacer uso de un medio en forma de escalera y que al igual que con las unidades de longitud y de superficie les facilitará realizar las conversiones, por lo que es conveniente que los escolares la memoricen.

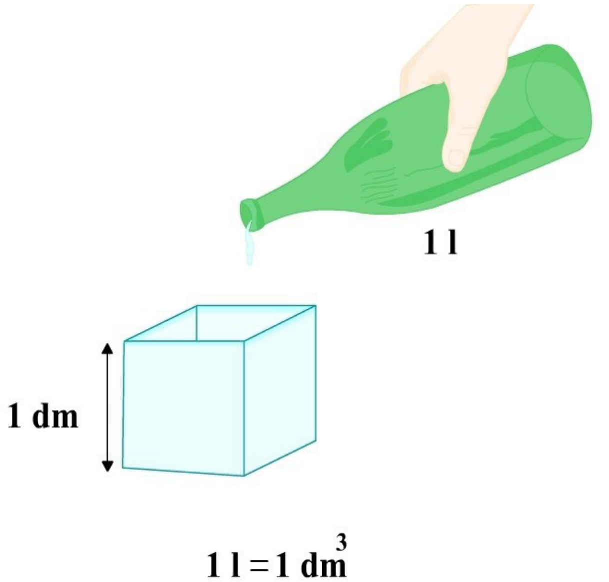
Para que memoricen los múltiplos y submúltiplos del metro cúbico (m^3) se pueden realizar ejercicios orales de conversión de una unidad mayor a otra menor y viceversa. Después puede dar una unidad cualquiera y pedir la que le sigue, o la que está antes, o todas las que le siguen, o que están antes.

Un concepto que guarda estrecha relación con el de volumen es el de capacidad. Se llama capacidad a la cantidad que cabe en un objeto o recipiente. Se considera necesario que los escolares, partiendo de objetos concretos, puedan conocer que todos los cuerpos tienen volumen pero no todos tienen capacidad. La unidad fundamental de capacidad es el litro (l). En litro se puede expresar la cantidad de agua que puede contener una piscina, la gasolina que cabe en la cisterna de una gasolinera y la cantidad de aceite que cabe en un pomo, etcétera.

Para trabajar los múltiplos y submúltiplos del litro debe procederse análogamente que con los múltiplos y submúltiplos del metro cúbico. Se considera necesario que se presente la siguiente situación problémica:

¿Cuántos litros de agua caben en un recipiente con forma cúbica que tiene 1 dm de lado?

Es en este análisis donde se posibilitará que los escolares comprendan la relación de equivalencia entre las unidades de volumen y las unidades de capacidad al llegar a la conclusión de que un litro (l) es la capacidad de un recipiente cúbico de 1 dm de lado: **1 l = 1 dm³.**



3.7. El tratamiento de los gráficos

El tratamiento de los gráficos juega un papel muy importante y que también se aborda en otras ramas de la Matemática. Lo importante que se debe lograr es que los escolares aprendan a interpretar los gráfico y reconozcan la utilidad que tienen para representar y comprender situaciones de diferentes esferas de la vida. El gráfico es la representación geométrica de datos numéricos, mediante líneas, puntos, rectángulos, etcétera.

No obstante resulta de interés que los escolares aprendan a construir gráficos. A continuación se dan algunos requisitos que deben ser tratados por los docentes para que los escolares adquieran ciertas habilidades en su confección.

Para la motivación pueden mostrarse láminas en las que aparezcan representadas situaciones de la práctica, mediante gráficas de barras, de líneas o circulares.

En los *gráficos de barra*s:

1. Las barras están a una misma distancia unas de otras en el eje x y pueden también estar a continuación.

2. La altura de cada barra depende del dato a que corresponda y se busca en el eje y.

3. En el eje y las divisiones están hechas a escala.

En los *gráficos circulares:*

1. Los gráficos circulares son utilizados para representar situaciones referidas a una misma cantidad.

2. Para esta representación se emplea el círculo. El centro de la circunferencia es el vértice de un ángulo de 3600.

3. Para construir un gráfico circular es muy importante aplicar los conocimientos sobre la relación entre las partes y el todo, al representar fracciones en un círculo. Es decir, dividir el círculo en partes iguales y tomar algunas de esas partes. La suma de todas las fracciones representadas en el grafico es igual a 1. Si los datos están expresados en por ciento la suma debe ser igual al 100 %.

En los *gráficos de líneas*:

1. La forma en que se determina cada punto es la misma que en la de barras, pero se unen mediante segmentos.

Como actividad práctica los escolares podrán confeccionar gráficos relacionados con el desarrollo económico y social del contexto en el que viven.

Materiales complementarios

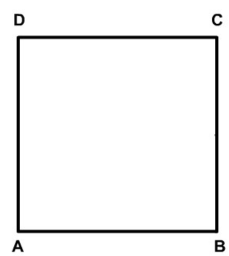
1. Procedimiento para la construcción de un tangram

El tangram o juego de los siete elementos es un rompecabeza, que tiene su origen en la antigua cultura china; consiste en 7 piezas (5 triángulos, 1 cuadrado y 1 paralelogramo), obtenidas a partir de un cuadrado. Con él se pueden representar objetos, siluetas en movimiento y figuras geométricas.

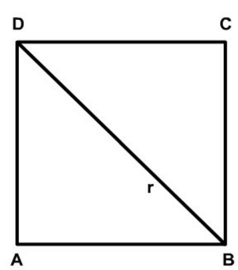
De forma seguida se brinda un procedimiento que puedes seguir para confeccionar un tangram:

Materiales necesarios: cartulina, regla, cartabón, colores o tempera y tijera.

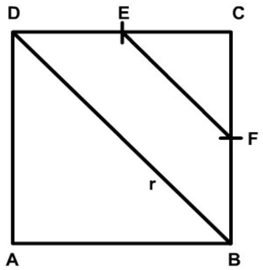
1. Se debe dibujar en la cartulina un cuadrado de 20 cm de lado y denotarlo con las letras A, B, C y D.



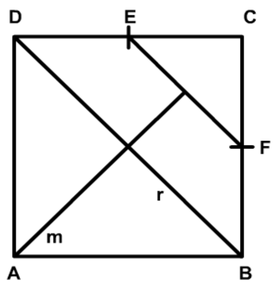
2. Después se traza una recta r, con la regla, de forma tal que divida ese cuadrado en dos triángulos iguales.



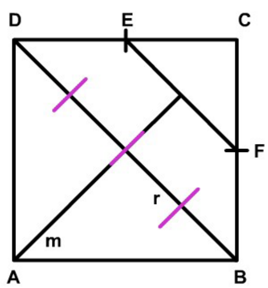
3. Se sitúan los puntos E y F, respectivamente, en el medio de los segmentos DC y BC y se traza un segmento que una dichos puntos y sea paralelo a la recta r.



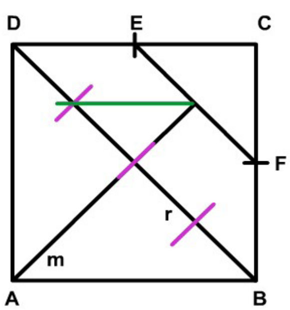
4. Se traza una recta m, perpendicular al segmento EF, de forma tal que corte a la recta r y que pase por el punto A.



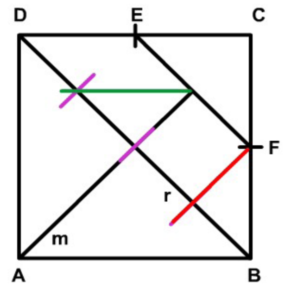
5. Se divide la recta r, con la regla, en cuatro partes iguales.



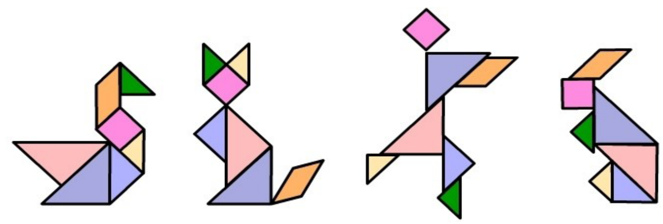
6. Se traza la recta verde que se muestra a continuación, paralela al segmento DE.



7. Por último, se traza esta recta roja, perpendicular a la recta r y se recortan, cada una de las piezas que lo conforman.



Algunas figuras que pueden ser armadas con el tangram:



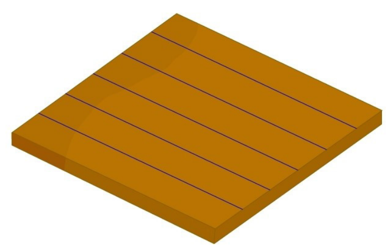
2. Procedimiento para la construcción de un geoplano

En el geoplano se pueden representar con bandas de goma figuras y movimiento geométricos.

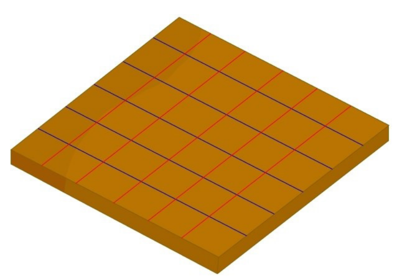
A continuación se ofrece un procedimiento para su elaboración:

Materiales necesarios: Pedazo de madera, un lápiz, una regla, un cartabón, veinticinco clavos y un martillo.

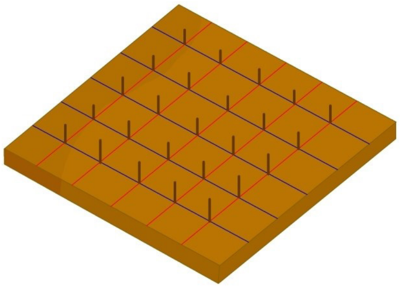
1. En una tabla donde una de sus caras tenga 30 cm de lados se divide su lado izquierdo en 6 partes iguales y se trazan cinco rectas paralelas.



2. Luego se divide la parte superior de la tabla en seis partes iguales y se trazan cinco rectas paralelas que corten a las rectas anteriores perpendicularmente y que formen cuadrados.



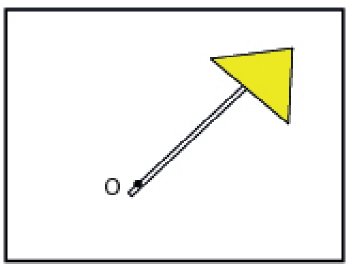
3. Por último, se colocan cada uno de los clavos en el lugar donde se cortan las rectas.



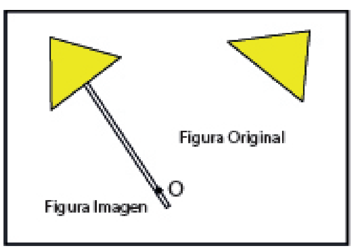
3. Procedimiento para la construcción de un medio de enseñanza para el movimiento de rotación

Materiales necesarios: Cartulina, un lápiz, regla o cartabón, clavo, colores o tempera.

1. Se recorta un triángulo en cartulina igual al trazado y se pega a un rectángulo que haga la función de marco, en el que se pueda fijar una puntilla, de modo tal que se pueda rotar el triángulo a su alrededor.



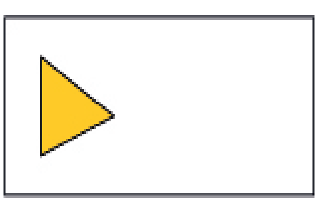
2. Se debe marcar la posición inicial (figura original) y el triángulo móvil en su posición final (figura imagen).



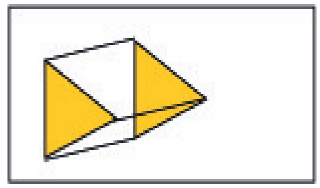
4. Procedimiento para la construcción de un medio de enseñanza para la traslación

Materiales necesarios: Cartulina, un lápiz, regla o cartabón, clavo, colores o tempera.

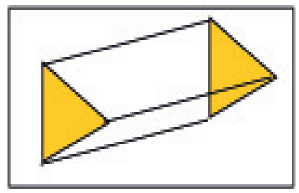
1. Cartulina con un triángulo fijo y otro igual móvil con unos pedazos de hilos de igual longitud, uno en cada vértice, que se encuentran detrás de modo tal que no sean visibles.



2. Se va trasladando el triángulo móvil como se observa en la lámina.



3. Se traslada el triángulo móvil según la longitud de los hilos y se fija el triángulo en su posición final (imagen).



Referencias bibliográficas

Alsina Catalá, C., Burgués Flamarich, C., & Fortuny Aymemí, J. M. (1989). Invitación a la Didáctica de la Geometría. Síntesis, S.A.

Alsina Catalá, C., Burgués Flamarich, C., & Fortuny Aymemí, J. M. (1991). Materiales para construir la Geometría. Síntesis, S.A.

Álvarez de Zayas, C. M. (1989). Fundamentos teóricos de la dirección del proceso docente educativo en la Educación Superior cubana. MES.

Álvarez de Zayas, C. M. (1999). La escuela en la vida. Pueblo y Educación.

Ballester Pedroso, S., et al. (2001). Metodología de la enseñanza de la Matemática I. Pueblo y Educación.

Barcia Martínez, R. (2000). La preparación geométrica de los Licenciados en Educación Primaria. (Tesis en opción al grado científico de Doctor en Ciencias Pedagógicas). Universidad "Carlos Rafael Rodríguez".

Brihuega Nieto, J. (2006). Espacio y forma. Materiales para el aula. http://www.galega.org/emdg/web/Espacio%20y%20forma.doc

Bronzina, L., Chemello, G., & Agrasar, M. (2009). Segundo Estudio Regional Comparativo y Explicativo. Aportes para la enseñanza de la Matemática. Salesianos Impresores S.A.

Cajaraville Pegito, J. A. (1989). Ordenador y Educación Matemática. Algunas modalidades de su uso. Síntesis.

Calvo Penadés, X., Carbó Colomer, M. C., Farell Pastor, M., & Fortuny Aymemi, J. M. (2002). La geometría: de las ideas del espacio al espacio de las ideas en el aula. Grao.

Campistrous, L., & Rizo, C. (1996). Aprende a resolver problemas aritméticos. Pueblo y Educación.

Canals Tolosa, M. A. (1997). La Geometría en las primeras edades escolares. Revista Suma, 25, 1-34.

Castellanos Simons, D., Castellanos Simons, B., Llivina Lavigne, M. J., Silverio Gómez, M., Reinoso Cápiro, C., & García Sánchez, C. (2002). Aprender y enseñar en la escuela. Una concepción desarrolladora. Pueblo y Educación.

Castillo, S., Arrieta, L., & Rodríguez, M. E. (2006). Epistemología y método en Educación Matemática. Copérnico: Revista Arbitrada Interdisciplinaria, 4, 51-58.

Chevallard, Y. (2005). La transposición didáctica. Del saber sabio al saber enseñado. Aique Grupo Editor, SA, .

Cruz Ramírez, M. (2006). La enseñanza de la Matemñatica a través de la resolución de probemas. Educación cubana.

D'Ambrosio, U. (2005). La integración de la matemática con las ciencias. Matematicalia: Revista digital de divulgación matemática, 1(1).

De Guzmán, M. (1993). Tendencias innovadoras en Educación Matemática. Organización de Estados para la Educación y la Cultura. Popular.

Díaz Godino, J. (2010). Perspectiva de la didáctica de las matemáticas como disciplina tecnocientífica. Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada. http://www.ugr.es/local/jgodino

Díaz Godino, J., & Batanero, C. (2009). Formación de profesores de matemáticas basada en la reflexión guiada sobre la práctica. Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada. http://www.ugr.es/local/jgodino

Díaz Godino, J., & Ruíz, F. (2002). Geometría y su didáctica para maestros. ReproDigital.

Díaz Godino, J., Batanero, C., & Font, V. (2004). Didáctica de las matemáticas para maestros. GAMI, S. L. Fotocopias.

Fridman, L.M. (1977). Análisis lógico-psicológicos de los problemas docentes. Editorial Pedagógica.

Galindo, C. (1996). Desarrollo de habilidades básicas para la comprensión de la geometría. Revista EMA, 1, 49-58.

Galperin, P. Y. (1982). Introducción a la Psicología. Pueblo y Educación.

Geissler, OStR E, et al. (1977). Metodología de la enseñanza de la Matemática 1 a 4. Grado. Primera parte. Pueblo y Educación.

Geissler, OStR E, et al. (1978). Metodología de la enseñanza de la Matemática 1 a 4. Grado. Tercera parte. Pueblo y Educación.

Giorgion, R. (2010). Habilidades matemáticas presentes em alunos do ensino medio participantes em feiras de ciências. (Mestrado em Educação Matemática). Pontífícia Universidade Católica.

Jaime Pastor, A., & Gutiérrez Rodríguez, Á. (1996). El grupo de las isometrías del plano. Síntesis.

Junquera Muné, J. (1961). Didáctica del cálculo. Labor.

Konstantinov, F., Malinin, V., Sorokoúmskaya, N., Ermolaéva, V., & Latínskaya, T. (1980). Fundamentos de filosofía marxista - leninista. Primera parte. Ciencias Sociales.

Labarrere Reyes, G., & Valdivia Pairol, G. (1988). Pedagogía. Pueblo y Educación.

Labarrere, A. (1987). Bases psicopedagógicas de la enseñanza de la solución de problemas matemáticos en la escuela primaria. Editorial Pueblo y Educación.

Lenin, V. I. (1964). Obras Completas. Vol. 29. Editora Política.

León González, J. L. (2011). Estrategia didáctica para el desarrollo de habilidades geométricas en el primer ciclo de la Educación Primaria. (Tesis en opción al grado científico de Doctor en Ciencias Pedagógicas). Universidad de Ciencias Pedagógicas: "Conrado Benítez García".

León González, J. L., & Barcia Martínez, R. (2006). La habilidad de reconocimiento geométrico de figuras compuestas en los escolares primarios. Conrado, 2 (6).

León González, J. L., & Barcia Martínez, R. (2010). Propuesta para la elaboración y utilización del tangram y el geoplano en el proceso de enseñanza-aprendizaje de la geometría de la Educación Primaria. Conrado, 6 (25).

León Roldán, T. (2007). Concepción didáctica para la enseñanza y el aprendizaje de la geometría con un enfoque dinámico en la Educación Primaria. (Tesis en opción al grado científico de Doctor en Ciencias Pedagógicas). Instituto Central de Ciencias Pedagógicas.

Majmutov, M. I. (1983). La enseñanza problémica. Pueblo y Educación.

National Council of Teachers of Matemathics. (2000). Principios para matemáticas escolares. NCTM. http://www.eduteka.org/PrincipiosMath.php

Ortiz Ocaña, A. L. (2006). Diccionario pedagógico, didáctico y metodológico. Hacia una pedagogía integradora y científica. CEPEDID.

Panizza, M. (2003). Conceptos básicos de la teoría de las situaciones didácticas. http://www.librospdf.net/panizza-mabell-/1/

Petrovski, A. V. (1986). Psicología General. Libros para la Educación.

Polya, G. (1976). ¿Cómo plantear o resolver problemas? Trillas.

Ponce Solozábal, J. R. (1988). El sistema psíquico del hombre. Editorial Científico-Técnica.

Proenza Garrido, Y. (2002). Modelo didáctico para el aprendizaje de los conceptos y procedimientos geométricos en la escuela primaria. (Tesis en opción al grado científico de Doctor en Ciencias Pedagógicas). ISP "José de la Luz y Caballero.

Puig Unzueta, S. (2003). Una aproximación a los niveles de desempeño cognitivo en los alumnos. Instituto Central de Ciencias Pedagógicas.

Rico Montero, P., Santos Palma, E. M., & Martín-Viaña Cuervo, V. (2008). Exigencias del modelo de escuela primaria para la dirección por el maestro de los procesos de educación, enseñanza y aprendizaje. Pueblo y Educación.

Rizo Cabrera, C. (1987). Estructuración del curso de geometría de cuarto a sexto grados basados en las transformaciones y la congruencia. (Tesis en opción al grado científico de Doctor en Ciencias Pedagógicas). Instituto Central de Ciencias Pedagógicas.

Rosental, M., & Ludin, M. (1981). Diccionario Filosófico. Instituto Cubano del Libro.

Rubinstein, S. L. (1966). El proceso del pensamiento. Editorial Universitaria.

Ruiz de Ugarrio, G. (1965). Cómo enseñar Aritmética en la escuela primaria. Pedagógica.

Ruiz Espín, L., et al. (2000). Metodología de la Educación Plástica en la Edad Infantil. Pueblo y Educación.

Savin, N. V. (1972). Pedagogía. Pueblo y Educación.

Silvestre Oramas, M., & Zilberstein Toruncha, J. (2002). Hacia una didáctica desarrolladora. Pueblo y Educación.

Talízina, N. (1988). Psicología de la enseñanza. Progreso.

Van Hiele, P. M. (1957). El problema de la comprensión: En conexión con la comprensión de los escolares en el aprendizaje de la geometría. (Tesis Doctoral). Universidad Real de Utrecht.

Vigotsky, L.S. (1979). El desarrollo de los procesos psicológicos superiores. Crítica.

Wielewski, G. D. (2005). Aspectos do pensamento matemático na resolução de problemas: uma apresentação contextualizada da obra de Krutetskii. (Tesis Doctoral). Pontíficia Universidade Católica.

En el proceso de enseñanza-aprendizaje de la Matemática en la Educación Primaria una de las principales dificultades que se presenta está relacionada con el desarrollo de habilidades geométricas en los escolares. Por esta razón, la obra centra el estudio en las habilidades geométricas: reconocer objetos geométricos; trazar y/o construir; argumentar proposiciones geométricas; y resolución de problemas geométricos de cálculo. En el libro se aportan los fundamentos teóricos para el desarrollo de habilidades geométricas en la Educación Primaria: principios, acciones, operaciones, niveles e indicadores. Se incluyen, además, recomendaciones metodológicas para el tratamiento de los objetos geométricos fundamentales que se abordan en este nivel educativo, separadas por ciclo; debido a la forma en que se les da tratamiento a los contenidos en cada uno de los grados. Se le brinda también a los docentes el procedimiento para realizar algunos medios de enseñanza para el tratamiento de los contenidos geométricos y el desarrollo de habilidades.

EDITORIAL EXCED

ISBN: 978-9942-7055-8-7

9 789942 705587